

Recordamos de la clase pasada:

Prop. Sea K un campo, V esp. vect., $\mathcal{L}$

$\mathcal{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ subalg. de $\mathcal{L}$ de dim.

finita. que consiste de elementos nilpotentes

a) Si $V \neq 0$ existe $v \in V \setminus \{0\}$ con $\mathcal{g} \cdot v = 0$

b) ~

c) Si V es de dim. finita, entonces
 V admite una base b.g. las
matrices de todos en el de $\mathcal{g}$
sean estrictamente triangulares
c.v. e esta base

Def. $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i]$
 $\leadsto$ nilpot.

$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ..., $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$
 $\leadsto$ soluble

• $x \in \mathfrak{g}$ se llama ad-nilpotente
 $\Leftrightarrow \text{ad}(x) \in \text{End}(\mathfrak{g})$ es nilpot.

Teorema (Engel) Un álgebra de Lie
de dimensión finita es nilpotente
 $\Leftrightarrow$ todos sus elementos son
ad-nilpotentes.

Dem. " $\Rightarrow$ " Por hipótesis, podemos
escoger una $\mathbb{R}$ -base $x_1, x_2, \dots, x_d$ de $\mathfrak{g}$
tal que $\mathfrak{g}^i = \text{span}_{\mathbb{R}} \{x_1, x_2, \dots, x_{d_i}\}$
 $\forall i \geq 1$ ciertos

$$d = d_0 > d_1 > d_2 > \dots \geq 0$$

Con respecto a esta base

$\text{ad}(x)$ es estrictamente triangular
para todo $x \in \mathfrak{g}_1$.

$\Rightarrow \text{ad}(x)$ es nilpotente $\forall x \in \mathfrak{g}_1$.

"
"
"

$$\text{ad}(\mathfrak{g}) := \{ \text{ad}(x) \mid x \in \mathfrak{g} \} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

es por hipotesis un subalg.
que consiste de elementos nilp.

Por la prop. $\text{ad}(\mathfrak{g})$ consiste de
matrices estrictamente triangulares
con resp. a alguna base

$$\Rightarrow \text{ad}(\mathfrak{g})^i = 0 \quad \text{para algún } i \gg 0$$

ad-hum. de alg.

$$\Rightarrow 0 = \text{ad}(\mathfrak{g})^i \supset \text{ad}(\mathfrak{g}^i)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{g}^i \subset \text{Ker}(\text{ad}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$$

$$\Rightarrow g^{i+1} = 0 \quad \nwarrow \equiv [g^i, g^i]$$

1.4. El Teorema de Lié

Teorema de Lié (versión abstracta)

Toda representación nómple de dimensión finita de un álgebra de Lié soluble sobre los complejos es de dimensión 1.

Teorema de Lió (versión concreta)

Sea $V \neq 0$ un espacio vect / $\mathbb{C}$
de dimensión finita $\hookrightarrow$

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ un subálgebra de Lió
soluble. Entonces existe un

"vector propio común" $v \in V \setminus \{0\}$
para todos los elementos de $\mathfrak{g}$

es decir $\mathfrak{g} \cdot v \subset \mathbb{C} \cdot v$

$$\left[\begin{array}{l} x \cdot v = \lambda(x) \cdot v \quad \forall x \in \mathfrak{g} \\ \lambda(x) \in \mathbb{C} \end{array} \right)$$

Observaciones. Ambos teoremas
valen en la misma dem. sobre
cualquier campo K algebraicamente
cerrado con $\text{char}(K) = 0$.

- En característica positiva
el teorema es falso:

Por ejemplo si $\text{char}(K) = 2$

$\Rightarrow \mathfrak{sl}_2(K)$ es soluble (!)
pero la representación estándar
de $\mathfrak{sl}_2(K)$ sobre K^2 es simple,

si calculamos $[\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})]$

$$= \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si que $\mathbb{R} \neq 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

• Si consideramos

$$\mathfrak{g} = \text{span}(\partial_x, x \cdot, \text{id}) \text{ gl}(\mathbb{C}[x])$$

es un subalg. de $\mathfrak{L}\mathfrak{C}$ de dim 3

soluble de $\text{gl}(\mathbb{C}[x])$

$$[\partial_x, x](x^n) = (n+1)x^n - nx^n = x$$

$$\therefore [\partial_x, x] = \text{id}$$

Pero la representación natural
de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}[x]$ es simple

Dem. Las dos versiones del teorema
son equivalentes:

abstract $\Rightarrow$ concreto:

Consideramos a V como una rep.
de $\mathfrak{g}$ (usando $v \in \mathfrak{g}(V)$)

Como V es de dim. finita. Es
una subrep. simple (!) V'
y V' es de dim. 1 por absto.

Si v es una base V' es
nuestro vector propio común.

Concr. $\Rightarrow$ abstr.:

Si $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una
repr. de $\mathfrak{g}$ entonces

por lin. $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$
es una subalg. de Lie soluble

y podemos aplicar la versión
ancreta para identificar
una subexp. de $\text{dim} \cdot \mathcal{L}_1$.

Si V era simple tenemos
entonces $\text{dim} V = 1$.

Ahora vamos a demostrar la versión
concreta por inducción / $\text{dim} \mathcal{G}$.

Si $\text{dim} \mathcal{G} > 0$ entonces existe un ideal
 $I < \mathcal{G}$ con $\text{codim} \mathcal{G}(I) = 1$
($\equiv \text{dim} \mathcal{G}(I) = 1$)

Es es claro, porque por def.

$\mathfrak{g} / [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es abeliano
sol.

($\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$)

es decir en este cociente

cada subespacio es un ideal

Si escribimos en $\mathfrak{g} / [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \mathbb{I}'$

un ideal $\mathbb{I}'$ de codim. 1

entonces $\mathbb{I} := \pi^{-1}(\mathbb{I}')$ es

el ideal que buscamos

($\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} / [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$)

$\mathbb{I}$ es en particular un álgebra de

Es soluble de una dimensión menor,

Por hipótesis de inducción existe

$$v \in V \setminus \{0\} \text{ en}$$

$$Iv \subset Iv,$$

Es fácil ver que la función

$$\lambda: I \rightarrow \mathbb{C} \text{ en}$$

$$x \cdot v = \lambda(x) \cdot v$$

es una forma lineal

Consideramos el subespacio

propio común correspondiente

$$V_\lambda := \{ w \in V \mid x \cdot w = \lambda(x) w \quad \forall x \in \mathfrak{t}^* \}$$

$$\supset \mathbb{C} \cdot v \text{ por def.} \implies V_\lambda \neq \emptyset$$

El siguiente lema demuestra que

$$g \cdot V_\lambda \subset V_\lambda !$$

Ahora escogemos $\gamma \in g \setminus \mathfrak{t}$

$$\implies g = \mathfrak{t} + \mathbb{C}\gamma$$

Por el lema, γ^n se restringe a un endomorfismo $\mathbb{C}$ -lineal de V_λ .

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente
cerrado existe un $v \in V, v \neq 0$
 $\gamma \cdot v = \lambda' \cdot v \quad (\lambda' \in \mathbb{C})$

Ahora tenemos claramente

$$\mathfrak{g} \cdot v \subset \mathbb{C} \cdot v \quad \square$$

En Lema vamos a asumir
 $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$

Lema Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo con $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$

$\gamma \quad V$ una rep. de dimensión finita

de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ / $\mathbb{K}$
un $\underline{I} \subset \mathfrak{g}$ un ideal

Entonces, para todos
 $\lambda \in \underline{I}^* \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\underline{I}, \mathbb{K})$

el subespacio simultáneo

$$V_{\lambda} := \{w \in V \mid x \cdot w = \lambda(x)w \quad \forall x \in \underline{I}\}$$

es una $\mathfrak{g}$ -subesp. de V .

Dem. En formulas tenemos que
demostrar:

$$(*) \quad x \cdot y \cdot w = \lambda(x) (y \cdot w) \quad \forall x \in I, y \in \mathfrak{g} \\ w \in V_\lambda$$

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot w &= y \cdot x \cdot w + \underbrace{[x, y]}_{\in I} \cdot w \\ &= y (\lambda(x) w) + \lambda([x, y]) w \end{aligned}$$

Por eso, es suficiente demostrar
que en caso $V_\lambda \neq 0$ tenemos

$$\lambda([x, y]) = 0, \quad \forall x \in I \\ \forall y \in \mathfrak{g}$$

Para eso consideramos $y \in \mathfrak{g}$
 $w \in V_\lambda \setminus \{0\}$

En esta situación existe un n máximo tal que

$$w, \gamma \cdot w, \gamma^2 w, \dots, \gamma^n w$$

sean l.i.n. indep.

$$\text{Sea } W := \text{span}_{\mathbb{R}} \{w, \gamma w, \dots, \gamma^n w\}$$

Por construcción, W es estable bajo la acción de γ .

Además W es estable bajo I :

Más precisamente, se demuestra por inducción i ;

$$\begin{aligned}
 (**) \quad x \cdot \gamma^i w &= \gamma (x \cdot \gamma^{i-1} w) \\
 &\quad + \underbrace{[x, \gamma]}_{\in I} \gamma^{i-1} w \quad \forall x \in I
 \end{aligned}$$

Esta fórmula implica
que todos los copartidos

$$W_i := \text{span}_{\mathbb{Z}}(w, \gamma w, \dots, \gamma^i w)$$

son estables bajo I

De la misma forma concluimos
naturalmente por inducción que

$$x \cdot \gamma^i w \in \gamma^i x w + W_{i-1}$$

$$\forall x \in \underline{I}, \quad w \in W_i.$$

Entonces, para todo $x \in \underline{I}$, la
matriz de $x: W \rightarrow W$
c.r., a nuestra base

$$w_1, \gamma w_1, \dots, \gamma^n w_1$$

es una matriz triangular
superior en $\lambda(x)$ en la diagonal,

Aplicando esta observación

$$\text{a } [x, \gamma] \in \underline{I} \quad (\text{en lugar de } x)$$

$$0 = \text{tr}([x, y]|_W) = \underbrace{(\text{dim } W)}_{\neq 0} \lambda([x, y])$$

$$\text{char } K \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda([x, y]) = 0 \quad \square$$