

Obs. En el teorema de Lie también es importante que $\mathbb{C}$ sea algebraicamente cerrado

Por ejemplo si $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ un alg. de Lie abeliano / $\mathbb{R}$ entonces podemos considerar la rep.

$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, dado

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{rotación en } \mathbb{R}^2)$$

define una rep. simple de dim. 2!

Corolario (del teorema de Lie)

Si $\mathfrak{g} / \mathbb{C}$ es un alg. de Lie soluble

$\gamma \quad \rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una rep.
de $\mathfrak{g}$ de dimensión $d < \infty$ entonces

1) V admite una cadena de subrep.

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_d = V \quad \text{con}$$

$$\dim V_j = j \quad \forall j = 0, 1, \dots, d$$

2) V admite una base tal que

$\rho(x)$ sea triangular superior c.r.

a esta base $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Dem. Con el teorema de Lie podemos
arguentar por reducción sobre el

ya que cada rep. de dim. finita tiene
una subrep. simple (que tiene que ser
en ~~en~~ nuestro caso de dimensión 1) $\square$

1.5. El criterio de Cartan

Teorema (Criterio de solubilidad de Cartan)

Sea $V / \mathbb{C}$ un esp. vet. de dim. finita

y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ un subalg. de Lié.

Entonces, $\mathfrak{g}$ es soluble

$$\Leftrightarrow \text{tr}(x \cdot y) = 0 \quad \forall x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$$

Obs. Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ es soluble,
entonces, por el corolario del
teorema de Lie podemos suponer
 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ (las matrices triangulares
superiores)

$\Rightarrow$ $X, Y \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{F})$ (matrices estrictamente
triang. superiores)
para $X \in \mathfrak{g}, Y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{M}(n, \mathbb{F})$

La otra dirección requiere algo de
preparación que nos va a ocupar
casi toda la clase de hoy

- En realidad el criterio es válido para cada campo $\mathbb{K}$ en dar $\chi(\mathbb{K}) = 0$ argumentando con la extensión de los valores!

Rec. (Forma normal de Jordan)

Sea V un esp. vect. de dim. finita / $\mathbb{K}$
 $x \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Entonces existen

endomorfismos únicos $x_0, x_n \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$
con las siguientes características;

i) x_0 es diagonalizable, x_n es nilpotente
} $x = x_0 + x_n$

$$(ii) [x_0, x_n] = 0$$

Existencia Podemos suponer que

con respecto a una base de V
 x tiene forma normal de Jordan

$$x = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, n_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_2, n_2) \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces

tomamos

$$x_0 := \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 E_{n_2} \end{pmatrix}$$

$$x_n := x - x_0 \checkmark$$

unicidad Sea $x = x'_0 + x'_n$ otra
 descomposición con las mismas
 características. Entonces consideremos
 la descomposición de V en espacios
 propios generalizados

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda \quad \text{c.r. a } x$$

$$(V_\lambda := \{v \in V \mid (x - \lambda \text{id})^n v = 0 \quad \forall n \geq 0\})$$

Por otro lado observamos,

$$[x'_0, x'_n] = 0 \implies [x'_0, x] = 0$$

$\parallel$
 $x'_0 + x'_n$

$$\Rightarrow x'_n(V_\lambda) \subset V_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}(!)$$

Do decho x, x_n, x'_n, x'_n
 e comutam entre elles

(por exemplo $x_n V_\lambda \subset V_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}$
 $x'_n V_\lambda \subset V_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}$

$$x_n^{(1)} v = \lambda v \quad \text{para } \forall v \in V_\lambda$$

$$\Rightarrow x_n - x'_n \text{ es nilpotente}$$

$$x_n - x'_n \text{ es diagonalizável}$$

$$x_n + x'_n = x'_n + x'_n \Rightarrow x_n - x'_n = x'_n - x'_n$$

diag + nilpot $\Rightarrow 0$.

Además, esta descomposición es no solamente única sino también "histórica" en el siguiente sentido:

$$\text{Sea } f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W) \\ x \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V), y \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(W)$$

E.g.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow y \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

entonces también

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_0 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow y_0 \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ x_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow y_n \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Lema 1 Sea $V/\mathbb{Q}$ esp. vect. de dim finita. Si $x = x_0 + x_n$ es la descomp. de Jordan de $x \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ entonces

$$\text{ad}(x) = \text{ad}(x_0) + \text{ad}(x_n)$$

es la descomposición de Jordan de $\text{ad}(x) \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{gl}(V))$!

En otras palabras

$$\text{ad}(x_0) = \text{ad}(x)_0$$

$$\gamma \text{ ad}(x_n) = \text{ad}(x)_n$$

Dem. Obviamente

- $[ad(x_n), ad(x_n)] = ad([x_n, x_n]) = 0$

$\Rightarrow ad(x_n) + ad(x_n) = ad(x)$,

- $ad(x_n)$ es nilpotente por el

Lema on 1.3

$$(ad(x))^n(y) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^i y x^{n-i}$$

- Falta verificar $ad(x_n)$ diagonalizable. Pero eso se va a hacer en la próxima clase. Para eso sea $v_1, v_2, \dots, v_n$ una base de V t.q.

con $x_n v_{\vec{j}} = \lambda_{\vec{j}} v_{\vec{j}}$ $\vec{j} = 1, 2, \dots, n$
 $\lambda_{\vec{j}} \in \mathbb{C}$

Entonces consideramos los endomorfismos
 estándar E_{ij} de V con

$$E_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$$

$$\text{ad}(x_n)(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$$

$$[x_n, E_{ij}] = x_n E_{ij} - E_{ij} x_n$$

calculamos

$$(x_n E_{ij} - E_{ij} x_n)(v_k) \quad \forall k$$

□

El siguiente resultado técnico
es la clave para el criterio de Cartan.

Lema Sea $V/\mathbb{C}$ un esp. vect. de
dim. finita. Consideremos subespacios
 $A \subset B \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ $\hookrightarrow$

$$T := \{x \in \text{End}(V) \mid \text{ad}(x)(B) \subseteq A\}$$
$$([x, b] \in A \quad \forall b \in B)$$

Si $x \in T$ cumple $\text{tr}(x^2) = 0 \quad \forall x \in T$
entonces x es nilpotente!

Dom. Sea $x = x_n + x_m$ desc. de Jordan

$$\stackrel{L1}{\Rightarrow} \text{ad}(x) = \text{ad}(x_n) + \text{ad}(x_m)$$

es desc. de Jordan de $\text{ad}(x)$.

Do $\text{ad}(x)(B) \subseteq A$ y la
funcionalidad de la desc. de Jordan

sigue $\text{ad}(x_n)(B) \subseteq A$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\ \text{ad}(x) \downarrow & & \downarrow 0 \\ B & \xrightarrow{\pi} & B/A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\ \text{func.} \Rightarrow \downarrow \text{ad}(x_n) & & \downarrow 0 \\ B & \xrightarrow{\pi} & B/A \end{array}$$

Dicho de otra forma, dos espacios
propios de $\text{ad}(x_0): B \rightarrow B$
que corresponden a valores propios
diferentes a 0, todos están
contenidos en A !

Primer fin de la dem. del Lema
(usando la estructura compleja de $\mathbb{C}$)

Escogemos una $\mathbb{C}$ -base de V
que consiste de vectores propios de x_0
digamos $x_0 v_j = \lambda_j v_j \quad j=1, 2, \dots, n$

Have definition $z \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ for

$$z \cdot v_j := \bar{\lambda}_j \cdot v_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(\text{ad}(z), \lambda) = \text{Eig}(\text{ad}(x), \tilde{\lambda})$$

$$(\text{Eig}(f, \lambda) := \{ \gamma \in \text{End}(V) \mid f\gamma = \lambda\gamma \})$$

$$\Rightarrow \text{ad}(z)(B) \subset A, \quad (z \in T)$$

$$0 \stackrel{\text{hyp}}{=} \text{tr}(xz) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\bar{\lambda}_i}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x_n \neq x_n \quad \square$$

Conclusión alternativa que nada
mas ocupa $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$ y $\mathbb{Q}$ alg. cerrado
Sea nuevamente $v_1, \dots, v_n$ base de V
solte $\mathbb{Z} := \mathbb{Q}$ tal que

$$X \cap v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}$$

Considerando

$$E := \text{span}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$ por $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$)

Queremos demostrar que $E = 0$

Si no fuera así sea

$$f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{Q}) \setminus \{0\}$$

Considerations $z \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$

con

$$z \cdot v_i = \underbrace{f(\lambda_i)}_{\in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}} v_i \quad \forall i$$

Intances $z \in T$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(z)(E_{ij}) &= f(\lambda_i) - f(\lambda_j) E_{ij} \\ &= f(\lambda_i - \lambda_j) E_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(\text{ad}(z); \mu) = \bigoplus_{\substack{f(\lambda) = \mu \\ \lambda \in E}} \text{Eig}(\text{ad}(x_{\lambda}, \lambda))$$

$$\Rightarrow \text{ad}(z)(B) \subset A$$

$$\gamma \quad \text{tr}(x, z) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i \cdot f(\lambda_i)}_{\in \mathbb{Q}}$$

Por hipótesis $\text{tr}(xz) = 0$ $\in E$ implica

$$0 = f(\underbrace{\text{tr}(x \cdot z)}_{\in E}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\lambda_i)^2}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow f(\lambda_i) = 0 \quad \forall i \quad \text{porque } f(\lambda_i) \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow f = 0 \quad \checkmark \quad \square$$

Ahora podemos concluir la dem.
del criterio de Cartan:

Es suficiente demostrar que
 $[g, g]$ es nilpotente.

Por 1.3 basta demostrar

$\forall x \in [g, g]$ es nilpotente
como endom. de V .

Por el Lema 2, nada es
suficiente verificar que

$$\text{tr}(zx) = 0 \quad \forall z \in \text{End}_G(V)$$

$$\text{con } [z, g] \subset [g, g]$$

$$(A = [g, g], \quad B = g)$$

Por construcción

$$x = \sum_i [c_i, d_i] \quad \text{con } c_i, d_i \in g$$

Instances

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(xz) = \sum_i \text{tr}([c_i, d_i] \cdot z)$$

$$= \sum_i \text{tr}(c_i, [d_i, z]) \stackrel{!}{=} 0$$

propiedad
de la traza

$$\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$$

$\in g$

$\in [g, g]$

□