

Rec. Criterio de Cartan:

Sea E un campo con $\text{char}(E) = 0$ (alg. cerrado)

γ V/E esp. vect. de dim. finita. Entonces

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ es soluble $\Leftrightarrow$

$$\text{tr}(x \cdot \gamma) = 0 \quad \forall \quad x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \gamma \in \mathfrak{g}$$

"fácil" $\Rightarrow$

con ayuda
de Liö

$\Leftarrow$ alg. Lin. "avanzada"

Def. Sea $\mathfrak{g}$ alg. de Liö / E

La forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es la forma

bilinear

$$\kappa = \kappa_g : g \times g \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \underbrace{\text{tr}}_g(\text{ad}(y) \circ \text{ad}(x))$$

Obs. • Ciertamente κ es simétrica

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) !$$

$$\uparrow$$

$$(xy - yx) \cdot z$$

$$x(yz - zy)$$

$$\text{usamos } \text{tr}(y(zx)) = \text{tr}(xz) \cdot 1 \dots$$

Esta propiedad se llama que

X es invariante bajo la acción adjunta.
Eso quiere decir lo siguiente:

La forma ω la podemos pensar

$$\text{como } \omega: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{y } \omega \in (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^*$$

bajo la acción natural ~~de~~ de $\mathfrak{g}$
sobre $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ por:

$$X \cdot (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h}) := [X, \mathfrak{g}] \otimes \mathfrak{h} + \mathfrak{g} \otimes [X, \mathfrak{h}]$$

con esa observamos

$$X(X \cdot [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) = X([X, \mathfrak{g}] \otimes \mathfrak{h} + \mathfrak{g} \otimes [X, \mathfrak{h}])$$

$$= \mathcal{K}(-[g, x] \otimes h + g \otimes [x, h]) = 0$$

"invar."

Corolario Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un campo K con $\text{char}(K) = 0$ es soluble

$$\Leftrightarrow \mathfrak{g} \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$$

$\uparrow$
 $\perp$ c. r. a $\mathcal{K}$

es decir sí

$$\mathcal{K}(x, [y, z]) = 0 \quad \forall \quad x, y, z \in \mathfrak{g}$$

Dem. Por el criterio de Cartan

nuestra nueva condición es equivalente

a decir que $\text{ad}(\mathfrak{g}) < \mathfrak{g}(\mathfrak{g})$

es soluble. Pero si consideramos

la suc. corta exacta de álgebras de Lie:

$$0 \rightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \text{ad}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$$

$\uparrow$
centro de $\mathfrak{g}$

sol. por

abeliano

$\uparrow$

sol. por

Cartan

$\Rightarrow \mathfrak{g}$ sol.

✓

1.6. Álgebras de Lie reductivas y semisimples

Def: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es

• semisimple si

$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$ con todos los $\mathfrak{g}_i$'s simples.

• $\mathfrak{g}$ reductivo si

$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{u}_1 \times \dots \times \mathfrak{u}_n$ con todos los

$\mathfrak{g}_i$'s irreducibles,

Obs: acordamos que $\mathfrak{g} = 0$ es semisimple.

• $0 \neq \mathfrak{g}$ abeliano, entonces
 $\mathfrak{g}$ es reductivo pero no
es semisimple.

• $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ es reductivo pero no
semisimple si $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \triangleq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{K} \rightarrow 0$$

$\leftarrow \dots \leftarrow$

$$\begin{pmatrix} t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t \end{pmatrix} \longleftarrow t$$

$$\in \mathfrak{f}(g_n)$$

Def: Una representación (de g) es semisimple $\Leftrightarrow$ es suma directa de rep. simples,
a ser como que la rep. 0 es semisimple.

Como siempre es fácil demostrar
que para una rep. V son eqvts;
(i) V es semisimple,

(i) V es suma (no nec. directa) de subesp. simplos.

(ii) Para cada subesp. V' de V existe una subesp. complementaria V''
t.q. $V = V' \oplus V''$

(estándar)

Ejemplos La rep. $\mathbb{C} \xrightarrow[\text{acciones}]{\uparrow} \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el álgebra de Lie abeliana $\mathbb{C}$

no es suma directa de dos rep.

de dim., pero tampoco es simple
porque la única subrep.

$\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene complemento,

Mas generalmente, una rep. de

$\mathbb{R} \rightarrow \text{gl}_n(\mathbb{R}), 1 \mapsto a.$

es semisimple si y solamente si
 a es diagonalizable en $\overline{\mathbb{R}}$ la
considera alg. de $\mathbb{R}$.

En este sentido la rep.

$\mathbb{R} \rightarrow \text{gl}_2(\mathbb{R}), 1 \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

es semisimple (simple!)

porque $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable $\mathbb{R} / \mathbb{C}$.

Notamos que con todo esto podemos decir que $\mathfrak{g}$ es reductivo

$\Leftrightarrow$ su representación adjunta es semisimple(!).

Teorema (Caracterizaciones de álgebras semisimples)

Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dim. finita sobre un campo K con $\text{char}(K) = 0$ son
equivalentes

(i) Si $\mathcal{I} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal abeliano $\Rightarrow \mathcal{I} = 0$

(ii) Si $\mathcal{I} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal soluble $\Rightarrow \mathcal{I} = 0$

(iii) $\mathfrak{g}$ es semisimple

(iv) $\mathfrak{g}$ es suma directa de sus ideales
simples

(v) La forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es
no degenerado

$(\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}, \exists \mathcal{K}(x, -) \neq 0)$

$\Leftrightarrow$ i.e. $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$

$x \rightarrow \mathcal{K}(x, -)$

es un isom.,
de esp. vect.,

"es un homomorfismo $\mathfrak{g}$ -invariant"

Para la demostración ocupamos un
Lema sobre la forma de Killing:

Lema Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, $I \subset \mathfrak{g}$
un ideal entonces

$$K_I = K_{\mathfrak{g}}|_{I \times I} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$$

Dem. Sea $a \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ con

$$a(\mathfrak{g}) \subset I$$

$$\text{e. g. } a = \text{ad}(x) \text{ con } x \in \mathfrak{g}$$

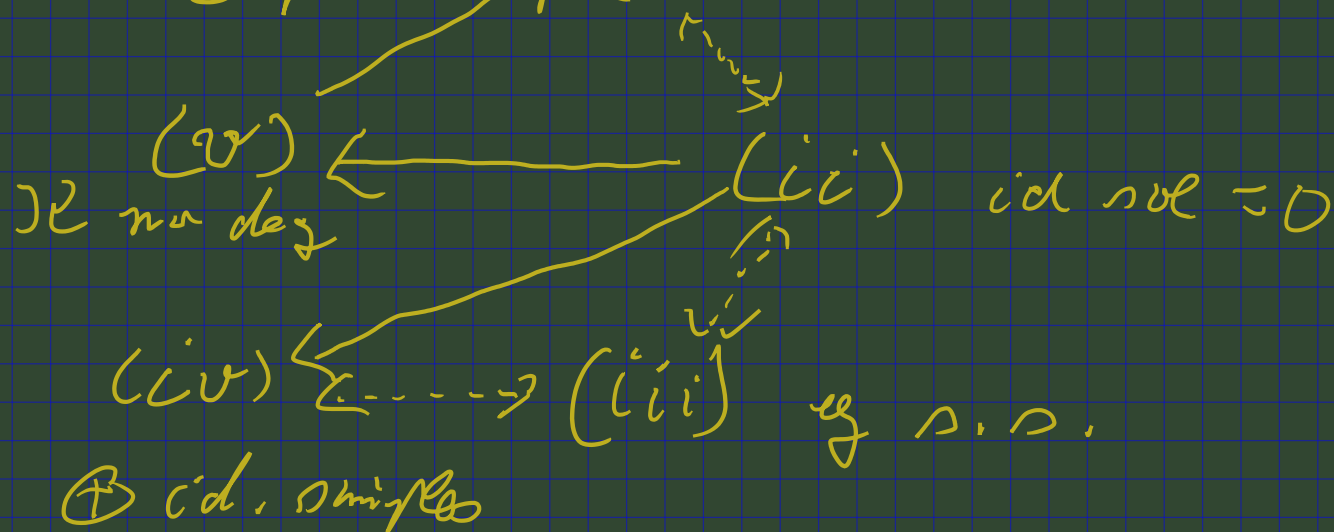
entonces:

$$\text{tr}_g(a) = \text{tr}(a|_I) :$$

$$a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline * & a_I \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{q. l. de } I \\ \text{en } g \end{array} \right\}$$

□

Dem. del trma plan: $(i) \quad \text{id ab} = 0$



las implicaciones (---) son fáciles

$$(ii) \Rightarrow (i)$$

Consideramos $\text{rad } K_y := \{x \in y \mid x(x, -) = 0\}$

Como χ es invariante

$\text{rad } K_y$ es un ideal de y

Lema

$$\Rightarrow K_y \mid \text{rad } K \times \text{rad } K = \chi \text{ rad } K$$

$\Rightarrow \text{rad } K_y$ es soluble
criterio de sol.

(ii)

$$\Rightarrow \text{rad } K_y = 0 \Rightarrow K \text{ es no sol.}$$

(10) $\Rightarrow$ (i) Soe $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal abeliano

Entonces

$$\left(\underset{\uparrow}{\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)} \right)^2 = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}, y \in I$$

$$\left[y, \underbrace{[x, [y, z]]}_{\in I \quad \forall z \in \mathfrak{g}} \right] = 0$$

I

$$\text{tr}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(z)) = 0 \quad \text{porque}$$

$\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)$
nilpotente.

$$\forall x \in \mathfrak{g}, y \in I$$

$$\Rightarrow I \subset \text{rad } \mathcal{U}_{\mathfrak{g}} = 0$$

ii) $\Rightarrow$ (iv) Sea $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal

$$\Rightarrow I^{\perp} := \{ \gamma \in \mathfrak{g} \mid \kappa(\gamma, I) = 0 \}$$

$I^{\perp}$ es un ideal porque κ es invariante!

entonces κ es nulo sobre el ideal

$$I \cap I^{\perp}$$

Por el Lema y el criterio de sol.

$$I \cap I^{\perp} \text{ es soluble} \xRightarrow{(ii)} I \cap I^{\perp} = 0$$

$$\rangle [I, I^{\perp}] = 0$$

por ii) $\Rightarrow$ (v) concluimos (SC no deg)

por razones de dimensión

$$I \oplus I^\perp = \mathfrak{g}.$$

($\mathfrak{K}$ no deg. $\Rightarrow \dim I^\perp + \dim I = \dim \mathfrak{g}$)

Esto significa que cada ideal de I o de $I^\perp$ también es un ideal de $\mathfrak{g}$!

ii)
 $\Rightarrow$ Es decir ni I ni $I^\perp$
contienen ideales solubles
excepto el 0.

Ahora podemos usar inducción sobre
la dimensión para concluir

$$\text{que } \mathfrak{g} = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$$

donde todos los I_j son ideales simples.

Si $I' \subset \mathfrak{g}$ fuera otro ideal simple de $\mathfrak{g}$ entonces

$$I' := [I', \mathfrak{g}] = \underbrace{[I', I_1]}_{\text{ideal } \subset (I_1 \perp I_2)} \oplus \dots \oplus [I', I_n]$$

por ser I' simple $I = I_a$

algún $a \in \{1, \dots, n\}$.

Las implicaciones

$$(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (i)$$

son fáciles (ejercicio)

