Rec. Para un álg. de Lie $\mathfrak{g}$ de dim finita sobre un campo k con $\mathrm{char}(k)=0$ son equiv:

- $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=0$ ($\Leftrightarrow$ todo ideal soluble es 0)
- $\mathfrak{g}$ es suma directa de sus ideales simples
- La forma de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to k$ es no degenerada

Obs. En el transcurso de las semanas veremos también varias caracterizaciones de álgebras de Lie reductivas. Son equiv:

i) La rep adjunta de $\mathfrak{g}$ es semisimple

ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}\oplus\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{s}$ s.s. y $\mathfrak{a}$ abeliano

iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ con $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ el centro de $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}'$ s.s.

iv) $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$

v) $\mathfrak{g}$ admite una rep. <u>fiel</u>

$S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ semisimple

fiel $:\Leftrightarrow$ S inyectivo

2. Álgebras de Lie semisimples $/\mathbb{C}$

2.1. El teorema de Weyl

Lema de Schur Si $\mathfrak{g}$ es un álg. de Lie$/\mathbb{C}$ y L una representación simple de $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, entonces

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(L) = \mathbb{C}\cdot id_L$$

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(L) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L)^{\mathfrak{g}}$$

Dem: Sea $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(L) \setminus \{0\}$

Entonces φ como endom. $\mathbb{C}$-lin. de L

tiene un valor propio λ.

Entonces es fácil ver que el espacio propio L_λ de φ para λ es una subesp. no triv. de L

L simple $\Longrightarrow$ $L = L_\lambda \Rightarrow \varphi = \lambda \cdot id_L$. $\square$

Obs. (1) NO usamos $\mathrm{char}(\mathbb{C}) = 0$

(2) La afirmación del Lema vale también si la dimensión de L es numerable y el campo base tiene una cardinalidad no numerable ...

(3) El Lema no vale por ejemplo sobre

$\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{C}$:

$\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, $L = {}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $\rho(\lambda) = \lambda$ ¡simple!

$\Rightarrow \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(L) \cong \mathbb{C} \neq \mathbb{R}$

<u>Teorema de Weyl</u> Cada representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ es suma directa de representaciones simples.

La demostración va ocupar (casi) toda la sección 2.1

El operador de Casimir

Sea $\mathfrak{g}$ de dim. finita y $\mathcal{B}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{k}$ una forma bil. no deg. e invariante.

Para cada rep. V de $\mathfrak{g}$ podemos definir un mapeo $\mathbb{k}$-lineal

$$C_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{V} : V \longrightarrow V \qquad \text{como sigue:}$$

- escogemos una base $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathfrak{g}$
- denotamos con $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ la base dual de $\mathfrak{g}$ c. r. a $\mathcal{B}$

es decir $\quad$ ($x^{(i)} \in \mathfrak{g}$!)

$b(x^{(i)}, x_j) = \delta_{ij}$

(existe porque b es no deg.)

$\boxed{b(x^{(i)}, -) = x_i^V}$

· ahora definimos

$C_b^V : V \longrightarrow V$

$v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{(x^{(i)} \cdot v)}_{\in V}$

se verifica que C_b^V es efectivamente k-lineal y no depende de la base

<u>Lema 1</u> C_b^V conmuta con la acción de $\mathfrak{g}$, es decir $C_b^V \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$

Dem. Para $y \in \mathfrak{g}$ expandimos los conmutadores con las dos bases:

$$[x_i, y] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad (a_{ij} \in k)$$

$$[y, x^{(j)}] = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, x^{(i)} \qquad (b_{ji} \in k)$$

$$b\left([x_i, y],\, x^{(j)}\right) = a_{ij}$$

$$\| \quad b \text{ inv.}$$

$$b\left(x_i,\, [y, x^{(j)}]\right) = b_{ij} \qquad \forall\, i, j$$

por def. de base dual

con eso calculamos

$$y\, C_B^V(v) - C_B(y \cdot v) =$$

$$= \sum_{i'} \Big(y\, x_{i'} x^{(i')} v - x_{i'} y\, x^{(i')} v + x_{i'} y\, x^{(i')} v - x_{i'} x^{(i')} y\, v \Big)$$

$$= \sum_{i'} [y, x_{i'}]\, x^{(i')} v + x_{i'} [y, x^{(i')}]\, v$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j} - a_{ij}\, x_j\, x^{(i)} v + \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x^{(j)} v}_{=}$$

$$= 0 \quad \square$$

- La próxima semana veremos una demostración un poco más conceptual.

- Para $b = \mathcal{K}$ la forma de Killing de un álgebra de Lie semisimple $C_{\mathcal{K}} : V \longrightarrow V$ se llama el <u>operador de Casimir</u>.

<u>Ejercicio</u> para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ con la base estándar (e, h, f) $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

se verifica que el operador de Casimir es representado por la expresión:

$$(e\cdot f + f\cdot e)/4 + h^2/8$$

$$= f\cdot e/2 + h\cdot(h+2)/8$$

sobre la rep. simple de dimensión $(n+1)$ actúa por el escalar

$$n(n+2)/8 \,!$$

Lema 2 a) Sea $\mathrm{char}(k) = 0$ y

- V/k esp. vect de dim. finita
- $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ subálg. semisimple.

Entonces

a) $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$, $(x,y) \mapsto \mathrm{tr}(x \cdot y)$

es una forma bilineal, simétrica invariante y no degenerada $b = b_V / \mathfrak{g}$.

b) Para el mapeo correspondiente

$C = C_b^V$ vale $\mathrm{tr}(C) = \dim \mathfrak{g}$

Dem: a) nuestra forma bilineal es claramente simétrica e invariante

$\mathrm{Tr}([x,y]\cdot z) = \mathrm{Tr}(x\cdot[y,z])$

$\mathrm{Tr}((xy-yx)\cdot z) = \mathrm{Tr}(x(yz-zy))$

En particular $\mathrm{rad}\, b \subset \mathfrak{g}$ es un ideal

$$\mathrm{rad}\, b = \{x \in \mathfrak{g} \mid b(x,-)=0\}$$

Por criterio de Cartan $\mathrm{rad}(b)$ es soluble $\xRightarrow{\text{criti. de s.s}}$ $\mathrm{rad}(b)=0$

$\Rightarrow b$ es no deg.

b) Por definición $\mathrm{Tr}(x_i x^{(i)})=1$

$\square$

$V^{\mathfrak{g}}$ y $\mathfrak{g}V$

Recordamos: Si V es una rep. de $\mathfrak{g}$

$$V^{\mathfrak{g}} := \{ v \in V \mid x \cdot v = 0 \quad \forall\, x \in \mathfrak{g} \}$$

$$\mathfrak{g}V := \operatorname{span}_{\Bbbk} \{ x \cdot v \mid x \in \mathfrak{g},\ v \in V \}$$

son subrepresentaciones de V.

Si W es otra rep. de $\mathfrak{g}$ entonces

$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ es una rep. de $\mathfrak{g}$ con

$$(x \cdot \varphi)(v) := x \cdot \varphi(v) - \varphi(x \cdot v) \;!$$

$$\therefore \quad \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, W)^{\mathfrak{g}} = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W).$$

- Si $\psi: U \to V$ es un hom. de representaciones, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, W)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \psi$$

es un homomorfismo de representaciones!

- En particular si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ entonces

$$\varphi(V^{\mathfrak{g}}) \subset W^{\mathfrak{g}}$$

$$\varphi(\mathfrak{g} V) \subset \mathfrak{g} W$$

si $x \cdot v = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$

$0 = \varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v) \quad \forall x \in \mathfrak{g}$

resultado clave:

<u>Lema 3</u> Si V es una rep. de dim finita de un álg. de Lie s.s $\mathfrak{g} / \mathbb{C}$ entonces

$$V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V \quad !$$