

↑

$$\text{si } x \cdot v = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

$$0 = \varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v) \quad \forall x \in \mathfrak{g}$$

resultado clave:

Lema 3 Si V es una rep. de
der. finita de un álgebra de Lie
n.s. $\mathfrak{g} / \mathbb{C}$ entonces

$$V = V^{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{g}V \quad !$$

Dem. por inducción / der. V

Podemos suponer $V \neq V^{\mathfrak{g}}$

Sea $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ el hom. de alg.
de $\mathfrak{g}$ que define la rep, entonces
 $\rho(\mathfrak{g}) \neq 0$, y semisimple.

Estudiemos el endomorfismo C de V
del Lema 2 para $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$

Como $\mathfrak{C}$ es alg. cerrado, V es suma directa
de los espacios propios generalizados de C
para los diferentes valores propios de C

Como C es un endomorfismo $\rho(\mathfrak{g})$ -inicial
de V , estos espacios son sumandos

directos de V .

Por eso podemos suponer que C tiene un solo valor propio γ , porque de otra forma podemos aplicar a cada uno de estos sumandos la hip. de ind.

Entonces tenemos

$$(\dim V) \cdot \gamma = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n \gamma_i = \dim(\gamma(\mathbb{A})) \neq 0$$

$$\Rightarrow \gamma \neq 0. \quad V = V_\gamma \text{ esp. gen. de } C$$

$\operatorname{char}(P) = 0$

$$\Rightarrow C \text{ es invertible} \Rightarrow V = C \cdot V$$

$$\Rightarrow V^{\mathfrak{g}} = 0 \quad \text{y} \quad V = \mathfrak{g} V$$

usando $C \cdot v = \left(\sum x^{(i)} x_i \right) v \quad \square$

Dem. del teorema de Weyl

Sea $U \hookrightarrow V$ una subrep. de V .

$\hookrightarrow$ induce un hom. suprayectivo de representaciones:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U) : \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ \iota$$

(ver discusión antes del lema 3)

Siguiendo con esta discusión $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)$
vénale como morfismos

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U)^{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)^{\mathfrak{g}},$$

$$\mathfrak{g} \text{ Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U) \rightarrow \mathfrak{g} \text{ Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)$$

Como $\text{Hom}(U, U)$ es suprayectivo

por el Lema 3 ($\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U)^{\mathfrak{g}}$

en particular

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, U)^{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)^{\mathfrak{g}}$$

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U)$$

es suprayectivo.

In particular, exist $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, U)$

$$\text{con } f \circ c = \text{id}_U$$

|||

$$\text{Hom}(U, U)(f)$$

$$\Rightarrow V = U \oplus \ker(f)$$

$\ker(f)$ es una subrep. de V
porque f es $\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$ -lineal

□

Corolario Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie/ $\mathcal{P}$

con $\text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ entonces

$\mathfrak{g}$ es reductiva.

Dem. Consideramos la rep. adjunta

$\text{ad}_g : g \rightarrow \mathfrak{gl}(g)$ y la forma

Killing $\kappa : g \times g \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(x, y) \mapsto \text{Tr}_g(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))$$

Como κ es invariante

$\text{rad}(\kappa)$ es un ideal

ese ideal es soluble por el criterio

Cartan

$$\Rightarrow \text{rad}(\kappa) \subset \text{rad}(g) \stackrel{\text{Lip}}{=} \mathfrak{f}(g) \\ = \text{Ker}(\text{ad}_g)$$

Por otro lado ($\text{rad}(K)$ ideal)

K induce una forma bilineal e simétrica
no degenerada sobre $\mathfrak{g} / \text{rad}(K)$

Crit de n.o.

$\Rightarrow \mathfrak{g} / \text{rad}(K)$ es n.o.

Weyl

$\Rightarrow \mathfrak{g}$ visto como rep. de $\mathfrak{g} / \text{rad}(K)$

usando la

$$\bar{\mathfrak{g}} : \underbrace{\mathfrak{g} / \text{rad}(K)}_{\subset \text{Ker}(\text{ad}_{\mathfrak{g}})} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$\mathfrak{g}$ es una rep. semisimple

$\Rightarrow g$ es también una rep. p.i.,
vía la rep. adjunta mismo

$\Rightarrow g$ es reductiva. $\square$

Prop. (Criterio de reductividad / semisimple)

(a) Si un álgebra de Lie $g / \mathbb{C}$
tiene una rep. fiel V que es
semisimple, entonces
 g es reductiva. Si V es además
simple, entonces $Z(g) \cong \mathbb{C}$

(lg) Si g actúa sobre esta rep. V
simple por endomorfismos de
traza 0, entonces g es simple.

Dem. Esto implica en particular que
 $gl(V)$ es reductiva y
 $sl(V)$ es simple al identificar
 V como una rep. simple.

Dem. de la Prop.

Como V es fiel, podemos suponer

$$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) \quad (\mathcal{S}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \text{ inyectiva})$$

γ elibrando $\mathcal{I} = \text{rad}(\mathfrak{g})$

Si $\mathcal{I} \neq 0$ por el teorema de Lié

encontramos $v \in V \setminus \{0\}$ γ $\lambda \in \mathcal{I}^*$

$$\text{en } i.v = \lambda(i) \cdot v \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Ahora consideremos:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid i.v = \lambda(i) \cdot v \quad \forall i \in \mathcal{I}\}$$

Por el Lema clave en la dem. del teorema de Lié, $V_\lambda \neq 0$ es una subrep.

de V .

Como V es semisimple V_λ es sumando directo de V como rep. de $\mathfrak{g}$.

Por inducción sobre $\dim$. V tenemos

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \underline{\Gamma}^+} V_\lambda \quad \text{como rep. de } \mathfrak{g}$$

De esta descomposición queda claro que $\mathbb{I}$ actúa sobre V por matrices diagonales;

$$\begin{array}{c}
 V_{\lambda_1} \quad V_{\lambda_2} \quad V_{\lambda_3} \\
 g: \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \bigg| \quad I \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}
 \end{array}$$

λ_1 λ_2 λ_3

$\hookrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_{\lambda_3}$ (example)

$$I = \text{rad}(g) = g(g)$$

$\Leftrightarrow g$ is reductive.

Claramente, si V es irreducible

$$V = V_\lambda \text{ para algún } \lambda \in \text{rad}(\mathfrak{g})^*$$

el mismo argumento demuestra

$$\text{que } \text{rad}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \cdot \text{id}_V.$$

b) es claro si V irred $\gamma \mathfrak{g}$
actúa por matrices de traza 0
entonces $\mathbb{C} \cdot \text{rad}(\mathfrak{g})$ tendrá que
ser 0 por la construcción en a).

(porque $\mathfrak{a} \cdot \text{rad}(\mathfrak{g})$ actúa por $\lambda \in \text{rad}(\mathfrak{g})^*$) $\Rightarrow$ la req. es trivial.

2.2. El operador de Casimir libre de coordenadas

Recordamos, Si V, W son rep. de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ entonces

$V \otimes_{\mathbb{R}} W$ es naturalmente una rep.

de $\mathfrak{g}$ con $x(v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w$

Por otro lado

$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ es una rep. de

$\mathfrak{g}$ con $(x \cdot \varphi)(v) := -\varphi(x \cdot v)$

de rep. dual de V .

Ahora, sea $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$

una forma bilineal, simétrica,
invariante y no-degenerada

y sea C_B^V el operador de Casimir

correspondiente. Entonces C_B^V es

la composición siguiente:

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \otimes V \longrightarrow (\underbrace{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*}_{\sim \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})}) \otimes V \longrightarrow \dots \\ v &\mapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

$$1 \otimes 1 \longrightarrow \underbrace{\left(\sum x_i' \otimes x_i'' \right)}_{= \text{id}_g} \otimes 1$$

$(\omega_i'(x_i') \text{ base de } g)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\quad} & (g \otimes g) \otimes V & \xrightarrow{\quad} & V \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \text{id}_g \otimes \beta^{-1} \otimes \text{id}_V & & \mu \otimes (\text{id}_g \otimes \mu) &
 \end{array}$$

donc $\beta : g \xrightarrow{\sim} g^*$

$x \longmapsto \omega(x, -)$

β est non, $\mathbb{K}$ -lin. par ses no de g ,

es un hom. de rep. por ser
invariante!

$$\mu: \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V, \quad x \otimes v \mapsto x \cdot v$$

es un hom. de rep. !

Como el operador de Casimir es
está una composición de homomorfismos
de representaciones, también es
un homomorfismo.

$$\left(\text{O.G., } \beta^{-1}(x_i^V) = x^{(i)} \in \mathfrak{g} \right)$$

$\hookrightarrow \mathfrak{g}^*$