2.3 Descomposición de Jordan en álgebras de Lie semisimples

Rec. $\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \ni x = x_s + x_n$

con · x_s diagonalizable

· x_n nilpotente ,

· $[x_s, x_n] = 0$

es única y funtorial

Llamamos por lo pronto a esta desc. la desc. de Jordan "concreta".

Prop. (Desc. de Jordan en alg. de Lie s.s.)

Sea $\mathfrak{g}$ un álg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$

a) Cada $x \in \mathfrak{g}$ tiene una única desc.

$x = s + n$ con

- ad (s) diagonalizable
- ad (n) nilpotente

"desc. de Jordan absoluta"

- $[s, n] = 0$

b) Si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una rep. de dim. finita de $\mathfrak{g}$ y $x = s + n$ es la desc. de Jordan absoluta de $x \in \mathfrak{g}$ entonces $\rho(x) = \rho(s) + \rho(n)$ es la desc. de Jordan concreta de $\rho(x)$ es decir $\rho(s) = \rho(x)_s$ y $\rho(n) = \rho(x)_n$

c) Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ es un homomorfismo de alg. de Lie con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ semisimple y $x = s + n$ es la desc. de Jordan absoluta de $x \in \mathfrak{g}$, entonces $\varphi(x) = \varphi(s) + \varphi(n)$ es la desc. de Jordan absoluta de $\varphi(x)$ en $\mathfrak{g}$!

<u>Comentario</u> Por la parte a) y b), una vez demostrada la Prop. ya no tenemos que preocuparnos de la diferencia entre la desc. de Jordan absoluta y concreta.
En la demostración usaremos siempre la desc. de Jordan en el sentido concreto.
Antes de embarcar la dem. necesitamos un par de Lemas.

Lema 1 Sea $\mathfrak{g}$ un alg. de Lie de dim. finita $/\mathbb{C}$ y $I \subset \mathfrak{g}$ un ideal semisimple.

Entonces existe un ideal $I^\perp \subset \mathfrak{g}$ t.q.

$$\mathfrak{g} = I \oplus I^\perp \quad \text{como espacios vect.}$$

(aquí I s.s. $:\Longleftrightarrow$ I s.s. como álg. de Lie)

Dem. $I^\perp := \{ x \in \mathfrak{g} \mid \kappa_{\mathfrak{g}}(x, I) = 0 \}$

$$= \operatorname{Ker}\left(\mathfrak{g} \to I^*, \; x \mapsto \kappa(x, -)|_I \right)$$

$$\Rightarrow \dim I^\perp \geq \dim \mathfrak{g} - \dim I$$

$I^\perp$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ porque κ es invariante (!)

Además la forma de Killing es nula

sobre $I \cap I^{\perp} \subset I$
ideal

Pero todos los ideales de un alg. de Lie s.s.
(como I) son semisimples (!)

Con el Lema sobre la restricción de
la forma de Killing a ideales vemos

$$\kappa_{I \cap I^{\perp}} = \kappa|_{I \cap I^{\perp}} = 0$$

crit. de s.s.

$$\Longrightarrow \quad I \cap I^{\perp} = 0$$

dim.

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp} \quad ✓$$

Lema 2 Sea $V/\mathbb{C}$ esp. vect de dim. finita y $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ subalg. de Lie **s.s.**

Si $x = x_s + x_n$ es la desc. de Jordan concreta de $x \in \mathfrak{g}$, entonces

$x_s, x_n \in \mathfrak{g}$

Dem. La demostración se basa en la la siguiente observación (paso 0)

(0) Sea $A \subset B$ esp. vect. de dim. finita $/ \mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ (alg. cerrado) y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(B)$ con $f(A) \subset A$

Entonces consideramos

$(f|_A) = f_s' + f_n'$ desc. de Jordan de $f|_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(A)$.

$f = f_s + f_n$ desc. de Jordan de $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(B)$

$$\Longrightarrow f_s(A) \subset A, \quad f_n(A) \subset A$$

$$\text{y} \quad f_s|_A = f_s', \quad f_n|_A = f_n'.$$

Esto sigue de la functorialidad de la desc. de Jordan (concreta)

$$\text{hip}: \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f|_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota"] & B \end{tikzcd} \overset{\text{funt.}}{\Longrightarrow} \begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f'_{s/n}"] & B \arrow[d, "f_{s/n}"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota"] & B \end{tikzcd}$$

En particular $f_s|_A$ es diagonalizable

y $f_n|_A$ es nilpotente

(1) Consideramos

$$D := \{ y \in \mathfrak{gl}(V) \mid [y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g} \quad (i)$$

$$\text{Si } W <_{\mathfrak{g}} V \Rightarrow y(W) \subset W \quad (ii)$$

$$\text{Si } W \leq_{\mathfrak{g}} V \Rightarrow tr_W(y|_W) = 0 \quad (iii)$$

Afirmamos: $y \in D \Rightarrow y_s, y_n \in D$

Para eso tenemos que verificar que y_s, y_n cumplen (i), (ii), (iii)

(i) $\Leftrightarrow$ $ad(y)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$

recordamos: $ad(y) = ad(y_s) + ad(y_n)$

es desc. de Jordan concreta de $ad(y)$.

Por (O): $ad(y_s)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$

$ad(y_n)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ ✓

(ii): claro por (O) ✓

(iii) Por (O) $y|_W = y_s|_W + y_n|_W$

es desc. de Jordan

$\operatorname{tr} y_n|_W = 0$ (nilpot.)

$\operatorname{tr} y_s|_W = \operatorname{tr} y|_W \underset{\text{hip (ii)}}{=} 0$ ✓

(2) $\mathfrak{g} \subset D \underset{\text{subalg.}}{\subset} \mathfrak{gl}(V)$

sea $x \in \mathfrak{g}$ entonces cumple trivialmente (i) y (ii)

para (iii) usamos

$$\mathfrak{g} \overset{\text{n.s.}}{=} [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \Rightarrow \underset{\mathfrak{g}}{x} = \sum_{j=1}^{n} [y_j, z_j]$$

pero $\mathrm{Tr}\, x|_V = \sum \underbrace{\mathrm{Tr}([y_j, z_j]|_V)}_{=0}$ ✓

$\mathfrak{D}$ es claramente un subálg. !

(3) $\underline{\underline{\mathfrak{g} = \mathfrak{D}}}$

Por (2) $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{D}$ es un ideal s.s. de $\mathfrak{D}$ (cumple cond. (i))

Entonces podemos aplicar Lema 1 ($\mathfrak{D} \to \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to I$ del Lema)

es decir, existe $\mathfrak{g}^{\perp} \subset \mathfrak{D}$ ideal t.q.

$\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$ (como esp. vect.)

$$\Longrightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\perp] \subseteq \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\perp = 0$$

Eso significa (por la def. de D)

$\gamma \in \mathfrak{g}^\perp \overset{\text{ideal}}{\subset} D$ actúa sobre

$W <_{\mathfrak{g}} V$ como un $\mathfrak{g}$-endomorfismo

$(\gamma(W) \subset W$ (ii), $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\perp] = 0)$

Si además W es simple

Schur

$\Longrightarrow \quad \gamma \cdot|_W = \lambda \cdot id_W \quad (\lambda \in \mathbb{C})$

(iii) de D

$\Longrightarrow \quad \gamma \cdot|_W = 0$

$0 = Tr(\gamma \cdot|_W) = \lambda \cdot \dim W$

$\Longrightarrow \lambda = 0.$

Tma de Weyl: $\mathfrak{g}^V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ ← simples.

$\Longrightarrow \gamma \cdot |_V = 0 \Longrightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \mathfrak{g}^\perp = 0,$

$\Longrightarrow \mathfrak{g} = D$ ✓

Dem. de la Prop.

a) Consideramos la desc. de Jordan concreta de

$$ad(x) = ad(x)_s + ad(x)_n \in ad(\mathfrak{g}) \subset End_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$$

$(ad: \mathfrak{g} \to End_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}))$

Podemos aplicar el Lema 2 a

$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$

$\Uparrow$

s.s. $\left(\ker(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \overset{\text{s.s.}}{=} 0 \right)$

Por eso $\mathrm{ad}(x)_s$, $\mathrm{ad}(x)_n \in \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$

En particular, existen $s, n \in \mathfrak{g}$ con

$\mathrm{ad}(s) = \mathrm{ad}(x)_s$, $\mathrm{ad}(n) = \mathrm{ad}(x)_n$

Con eso ya tenemos la existencia de la desc. de Jordan absoluta en $\mathfrak{g}$!

La unicidad sigue nuevamente

porque $\mathrm{Nuc}\, ad_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = 0$

$\uparrow$

s.s. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ ab.

b) Sea $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una rep. de dim. finita de $\mathfrak{g}$

Para $x \in \mathfrak{g}$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "ad_{\mathfrak{g}}(x)"'] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho(x)"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "ad_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(x))"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"'] & \rho(\mathfrak{g}) \arrow[r, hook] & \mathfrak{gl}(V)
\end{tikzcd}$$

$y \mapsto [x,y]$

$\rho(y) \mapsto [\rho(x), \rho(y)]$

$z \mapsto [\rho(x), z]$

Por la functorialidad de la desc. de Jordan concreta ∅ diag. sigue siendo conmutativo si en cada flecha vertical reemplazamos los mapeos por sus partes semisimples resp. nilpotentes.

También sigue la conmutatividad si en todas partes sustituimos x por s / n si $x = s + n$ es la desc. de Jordan absoluta

Pero por def, las dos diag. nuevas tienen la misma flecha vertical en la columna a la izquierda

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_{n} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(n)$$