2.4 Descomposición en espacios de raíz

Recordemos de álgebra lineal:

Si $T \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ subesp. de los endomorfismos

con $[t,s]=0 \quad \forall t,s \in T$, entonces

y $\forall\ t \in T$ diagonalizables

entonces

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda \qquad \text{donde}$$

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid t(v) = \lambda(t)\cdot v \quad \forall t \in T \}$$

es decir, podemos diagonalizar los elementos de T simultaneamente.

[$s, t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ diagonalizables con $[s,t]=0$

$$\Rightarrow \quad V = \bigoplus_{\lambda \in S(t)} V'_\lambda \qquad \text{con} \quad V'_\lambda = \{v \in V \mid t(v) = \lambda v\}$$

$$\xRightarrow{st=ts} \quad v \in V'_\lambda$$

$$t(sv) = s(tv) = s(\lambda v) = \lambda(sv)$$

$$\Rightarrow \quad sv \in V'_\lambda \quad \dots \quad]$$

Obviamente, tenemos incluso algo un poco más general:

Si $\rho: T \to \mathfrak{gl}(V)$ es una rep. de un álg de Lie abeliano T con $\rho(t)$ diagonalizable $\forall\, t \in T$ entonces

$$V = \bigoplus_{\lambda \in T^*} V_\lambda \quad \text{con}$$

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid \rho(t)\cdot v = \lambda(t)\, v \quad \forall\, t \in T \}$$

o en otras palabras

V es una rep. semisimple de T.

Los elementos
$$P(T) := \{\lambda \in T^* \mid V_\lambda \neq 0\}$$
se llaman los <u>pesos de la rep.</u> ρ de T.

<u>Ejemplo</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(k)$

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \quad \text{matr. diagonales}$$

Consideramos
$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}_k(\underbrace{\mathfrak{gl}_n(k)}_{V})$$

es una representación del álgebra de Lie abeliano $\mathfrak{h}$ con $\rho(h)$ diagonalizable para todo $h \in \mathfrak{h}$:

Efectivamente:

Sea $h = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_n) \in \mathfrak{h}$

$\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ tal que

$\varepsilon_i(h) = h_i$

E_{ij} el básico estándar

$$\begin{array}{cc} i & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{\substack{0\\ \vdots\\ 0}}{1} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ & \qquad\quad \substack{\vdots\\ 0}\; j \end{array} \quad \text{de } \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

$$[h, E_{ij}] = (h_i - h_j) E_{ij}$$
$$= (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)\, E_{ij}.$$

En otras palabras

$$P(\mathfrak{g}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\} \cup \{0\}$$

$\shortparallel$

$\mathfrak{gl}_n(k)$ son los pesos de $\mathfrak{gl}_n(k)$ rep. de $\mathfrak{h}$ (!)

Para $i \neq j$:

$$\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = k E_{ij}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \quad (\operatorname{char} k \neq 2)$$

Def: Un subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ se llama **subálgebra de Cartan** de $\mathfrak{g}$ sii

(i) $\mathfrak{h}$ es abeliano

(ii) $\mathfrak{h}$ consiste de elementos semisimples

(iii) $\mathfrak{h}$ es máximal con respecto a (i), (ii)

Por ejemplo, en $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ las matrices diagonales forman un subálgebra de Cartan (!) (de dimensión $n-1$)

Todavía más concreto en

$\mathfrak{sl}(n,2)$, $\underbrace{\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{h}}$ es subálg. de Cartan !

<u>Obs.</u> Más generalmente un subálg. de Cartan de un álg. de Lie $\mathfrak{g}$ (no necesariamente semisimple) es un subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

que sea nilpotente y tal que

$$\{ x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \} = \mathfrak{h}.$$

Veremos pronto que nuestras sub álgebras de Cartan cumplen esta condición.

<u>Def.</u> (Desc. en espacios de raíz)

Sea $\mathfrak{g} / \mathbb{C}$ un álgebra de Lie semi-simple y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálg. de Cartan. Es común, en este contexto, escribir para $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $Q \in \mathfrak{h}$

$$\langle \lambda, h \rangle := \lambda(h)$$

Por nuestra discusión anterior tenemos

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{con}$$

$$\mathfrak{g}_\lambda := \{ x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \langle \lambda, h \rangle x \ \forall h \in \mathfrak{h} \}$$

Ponemos

$$\begin{aligned} R &:= R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ &= \{ \alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \} \\ &= P(\mathfrak{g}) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

) así tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha .$$

El conjunto finito $R \subset \mathfrak{h}^*$ se llama <u>sistema de raíces</u> de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$,

y sus elementos se llaman raíces, de $\mathfrak{g}$ c.r. a $\mathfrak{h}$.

Los espacios propios simultáneos $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in R)$ se llaman espacio de raíz ("root space")

El término de "raíz" proviene de la nomenclatura antigua donde los zeros del polinomio característico de $ad_{\mathfrak g}(h)$ ($h \in \mathfrak h$) se llamaban raíces.

Nota
$$\begin{array}{l} \mathfrak g_0 := \mathfrak z_{\mathfrak g}(\mathfrak h) \equiv \{x \in \mathfrak g \mid [h,x]=0 \ \forall h \in \mathfrak h\} \\ \ \cup \\ \mathfrak h \qquad\qquad\qquad\qquad \subseteq N_{\mathfrak g}(\mathfrak h) \end{array}$$

Ejemplo: Sistema de raíces de tipo A_n)

Retomamos nuestro ejemplo básico $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ $\supset$ $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ las matrices diagonales. (con traza 0)

Entonces vemos:

* los $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ forman una base de $\mathfrak{h}^*$. (ejercicio fácil)

* $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C} E_{ij}$ esp. de raíz

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n+1} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathbb{C} E_{ij}$$

$$R = \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n+1, \; i \neq j \}$$

sistema de raíces

en particular de esto vemos que nuestro $\mathfrak{h}$ es maximal.

Obs. Las raíces de $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$ c. r. a $\mathfrak{h}$ son de la forma

$\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \dots + \varepsilon_j)$ con $1 \leq i \leq j \leq n$

Los E_i únicos "simples".