Desc. en espacios de raíz 2

Tma 1 (sobre la desc. en espacios raíz)

Sea $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ alg. de Lie semisimple y

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subálg. de Cartan

$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistema de raíces corresp.
$\subset \mathfrak{h}^*$

Con nuestra notación tenemos:

a) $\mathfrak{h}$ es su propio centralizador

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 \overset{(!)}{=} \mathfrak{h} \qquad (\text{"}\supseteq\text{" por def.})$$

b) Todos los espacios de raíz $\mathfrak{g}_\alpha$ con $\alpha \in R$ son de dimensión 1.

Aun más, para cada raíz $\alpha \in R$ existe un hom. inyectivo

$$\varphi_\alpha : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g} \quad \text{con}$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$$

en part $\alpha \in R \iff -\alpha \in R$

c) Si $\alpha \in R$ entonces, $+\alpha$ y $-\alpha$ son los únicos múltiplos de α que son raíces es decir

$$\alpha \in R \Rightarrow \mathbb{C} \cdot \alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$$

d) si $\alpha, \beta \in R$ con $\alpha+\beta \in R$ entonces

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

Vamos a demostrar el Tma 1 paso a paso, interrumpido por algunos Lemas.

Lema 1 Con las hipotesis del Teorema tenemos

a) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

b) Para la forma de Killing $\varkappa$ de $\mathfrak{g}$ tenemos

$$\varkappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0 \quad \text{si } \lambda+\mu \neq 0$$

c) La restricción de $\varkappa$ a $\mathfrak{g}_0$ es no deg.

Dem: a) Sea $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\mu$ entonces por def.

$$[h, x] = \lambda(h) \cdot x \quad y \quad [h, y] = \mu(h)\, y$$

$\forall h \in \mathfrak{h}$.

$$[h, [x, y]] \overset{\text{jac.}}{=} [x, [h, y]] - [y, [h, x]]$$
$$= \mu(h)[x, y] - \lambda(h)[y, x]$$
$$= (\mu + \lambda)(h)[x, y] \quad \forall h \in \mathfrak{h}$$
$$\Longrightarrow [x, y] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}.$$

b) Sea $x \in \mathfrak{g}_\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\mu$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Por a):

$$(\operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y))(\mathfrak{g}_\nu) \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu+\nu}$$

[Eso significa: Si $\lambda + \mu \neq 0$ entonces

$ad(x) \circ ad(y)$ es un operador nilpotente

$\Rightarrow tr(ad(x) \circ ad(y)) = 0$

c) Sea $z \in \mathfrak{g}_0 \Rightarrow \mathcal{K}(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in R$

Si además tuviéramos $\mathcal{K}(z, \mathfrak{g}_0) = 0$

$\mathcal{K}$ es no deg / $\mathfrak{g}$

$\Rightarrow$ $z = 0$ porque

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \square$$

Dem. de a) del Tma 1

Sea $x \in \mathfrak{g}_0$ (y queremos concluir $x \in \mathfrak{h}$.) $\Leftarrow [x, \mathfrak{h}] = 0$

Consideramos la desc. (absoluta) de Jordan

$x = s + n$

Por la functorialidad de la desc. de Jordan tenemos $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(\mathfrak{h}) \overset{\text{def.}}{=} 0$

$$\Rightarrow \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(s) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_s \;,$$
$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(n) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)_n \quad \text{anulan } \mathfrak{h}:$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, hook] \arrow[d, "0", "\mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{h}}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{ad}(x)\quad s/n"] \\
\mathfrak{h} \arrow[r, hook] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

En otras palabras $s, n \in \mathfrak{h}_0$

Como $\mathfrak{h}$ es máximo (c.r. a abel. y el. s.s.)

concluimos $s \in \mathfrak{g}$

Engel
$\Longrightarrow$ $\mathfrak{g}_0$ es nilpotente ($[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$)

porque para todo $x \in \mathfrak{g}_0$ tenemos

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(n(x))$ nilpot.

(ya que $s(x) \in \mathfrak{h} \Rightarrow [s, h_0] = 0$)

Por el teorema de Lie (y sus corolarios)
con respecto a una base adecuada de $\mathfrak{g}$
para todos los elementos ~~de~~ x de $\mathfrak{g}_0$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ es una matriz triangular superior

Si $n \in \mathfrak{g}_0$ tuviéramos $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(n)$ es nilpot, entonces $ad_{\mathfrak{g}}(n)$ tenía que ser estrictamente triangular superior, $\mathcal{K}(n, \mathfrak{g}_0) = 0$

(1c)

$\Longrightarrow n = 0$

En otras palabras $\mathfrak{g}_0$ consiste exclusivamente de elementos ad-semisimples

$\overset{\text{max de } \mathfrak{h}}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}.$

<u>Obs:</u> · Sea $x \in \mathfrak{g} \Longrightarrow x = \overset{\text{desc. en esp. de raíz}}{\sum_{\alpha \in R \cup \{0\}} x_\alpha}$

con $x_\alpha \in R_\alpha$

$$[h, x] = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, h \rangle x_\alpha \qquad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

- Tma 1(a) aplica $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$

Eso implica $\mathfrak{f} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, h] \subseteq \mathfrak{f}\}$

Ya que tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

Ahora si $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{f}) \setminus \mathfrak{f}$ podemos suponer $x = \sum_{\alpha \in R} x_\alpha \quad x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$

$$[x, h] = \underbrace{\sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, h \rangle x_\alpha}_{\notin \mathfrak{f}} \in \mathfrak{f} \quad \forall h \in \mathfrak{f}$$

↯.

Lema 2 Con las hipótesis del Tma. 1 tenemos

- $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$
- $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0 \quad \forall \alpha \in R$

Recordamos que por L1a) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0$ por Tma 1a) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, así que tiene sentido evaluar α en $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$.

Dem. Sea $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $h \in \mathfrak{h}$ entonces tenemos

$$\varkappa(h, [x,y]) \overset{\text{inv.}}{=} \varkappa([h,x], y) = \alpha(h)\varkappa(x,y)$$

es decir $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha]^\perp \supset \ker(\alpha)$

$$:= \{ h \in \mathfrak{h} \mid \kappa(h, [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) = 0 \}$$

Como la restricción de κ a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ es no deg. (Lema 1) vemos que

$$\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \leq 1 .$$

Si podemos encontrar x, y como arriba con $\alpha([x,y]) \neq 0$ acabamos.

Si esto no fuera posible siempre tendríamos

$$[\underbrace{[x,y]}_{\in \mathfrak{h}}, \underset{\in \mathfrak{g}_\alpha}{x}] = \underbrace{\alpha([x,y])}_{0} \cdot x = 0$$

$$[[x,y],y] = -\alpha([x,y])\cdot y = 0$$

en otras palabras

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x, y, [x,y]\} \subset \mathfrak{g} \text{ sería}$$

un subálg. de $\mathfrak{g}$ que es nilpot.

Por el Teorema de Lie, en una base adecuada de $\mathfrak{g}$

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)$ tendrían forma triangular superior.

- De hecho, éstas matrices tienen que ser <u>estrictamente</u> triangulares porque x, y son ad nilpotentes

Por el Lema 1(a)

$$\Rightarrow \mathcal{K}(x, y) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathfrak{g}_\alpha,\ y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

$$0 = \mathcal{K}\Big(x,\ \underbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{L1b}}}{\mathfrak{g}_\alpha} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hip,}}}{\mathfrak{g}_{-\alpha}} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triv}}}{\mathfrak{h}} \oplus \ \ \oplus \underset{\substack{\alpha \in R \setminus \{-\alpha, \alpha\} \\ \text{L1b}}}{\mathfrak{g}_\alpha}}_{\mathfrak{g}}\Big)$$

$\mathcal{K}$ no deg

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \lightning \quad \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \text{ por hip.}$$

$\square$

Lema 2 motiva: Con la hip. del Tma 1 y $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ definimos la coraíz $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ por las condiciones

- $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$
- $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$

Esto define $\alpha^\vee$ de forma única por el Lema 2!