Rec.: Tma 1 $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ s.s. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ Cartan

$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ sist. raíces

$$\mathfrak{g} = \underset{\substack{\cup \\ \mathfrak{h}}}{\mathfrak{g}_0} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

a) $\mathfrak{h} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \Longrightarrow \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$

b) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad \forall \alpha \in R$ &

$$\exists\, \varphi_\alpha : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

$$\varphi_\alpha\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$$

c) $\alpha \in R \Rightarrow \mathbb{C}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$

d) $\alpha, \beta \in R$ y $\alpha+\beta \in R \Rightarrow [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$

<u>L1.</u> a) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

b) $\varkappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = 0$ si $\lambda+\mu \neq 0$

c) $\varkappa|_{\mathfrak{g}_0}$ es no deg. ✓

$\Rightarrow$ Tma 1a) ✓ usando desc. de Jordan

$\Rightarrow \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \stackrel{!}{=} N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$

<u>L2</u> $\dim[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ y $\alpha([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]) \neq 0$
$\forall \alpha \in R$

usando $\varkappa$ no deg + Tma de Lie! ✓

$\rightsquigarrow \exists!\, \alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h} : \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$

$\alpha^\vee$ <u>correcta</u>

<u>Dem:</u> del Tma 1 b) y c)

De la Def. sigue $(-\alpha)^\vee = -(\alpha^\vee)$

y podemos encontrar $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$

con $[x, y] = \alpha^\vee$

$$\Rightarrow [\alpha^\vee, x] = \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle x = 2x$$

$$[\alpha^\vee, y] = \langle -\alpha, \alpha^\vee \rangle x = -2y$$

Por eso, $\mathfrak{g}^\alpha := \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{x, \alpha^\vee, y\} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

como álg. de Lie

$$\cup$$

$$\mathfrak{g}$$

$\Rightarrow$ Vía la repr. adjunta podemos ver a $\mathfrak{g}$ como una repr. de $\mathfrak{g}^\alpha$ (de dim finita porque $\mathfrak{g}$ es de dim. finita)

De la teoría de rep. de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ sabemos que

$h \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alias $\alpha^\vee$ en su

acción sobre una rep. dim. finita (en nuestro caso, $\mathfrak{g}$) tiene solo valores propios enteros,

y también sabemos, si aparece el valor propio $n \in \mathbb{Z}$, entonces también $-n$ es valor propio

Además, por la def. de $\alpha^\vee$ vemos que $\mathfrak{g}^{\alpha^\vee} \cong \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_{t\alpha} \subset \mathfrak{g}$

es una subrep. de $\mathfrak{g}^\alpha$

( $\alpha^\vee \cdot \mathfrak{g}_{t\alpha} \subset \mathfrak{g}_{t\alpha}$ , $x \cdot \mathfrak{g}_{t\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(t+1)\alpha}$ - - - )

Del teorema de Weyl esta rep. se descompone como

$$\mathfrak{g}^\alpha \oplus V = \mathbb{C}\alpha^\vee \oplus \bigoplus_{t\neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$$

en particular $\alpha^\vee$ actúa sobre $V$ como un operador invertible,

$\alpha^\vee$ actua sobre $\mathfrak{g}_{t\alpha}$ como el escalar

$\langle t\alpha, \alpha^\vee\rangle = 2t$ $\quad t\neq 0$ !

y ~~es~~ el único espacio propio para el valor propio 0 esta contenido en $\mathfrak{g}^{\alpha}$

porque $V \subset \bigoplus_{t \neq 0} \mathfrak{g}_{t\alpha}$

$V$ también se descompone en una suma directa de repns simples.

y si $\alpha^{\vee}$ actua de forma invertible el valor propio 0 no aparece

tiene que aparecer el valor propio 1

(de nuestra clasificación de las repn. simples de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)

Eso significa: si

$$\mathfrak{g}_{\alpha/2} \neq 0 \Rightarrow \alpha/2 \in R$$

En otras palabras 1b) y c) valen para todo $\alpha \in R$ con $\alpha/2 \notin R$

~~Ro~~ Pero, como para cada $\alpha \in R$ existe un $k \in \mathbb{N}$ t.q. $\alpha/2^k \in R$ pero $\alpha/2^{k+1} \notin R$, en realidad nuestra afirmación vale para todo $\alpha \in R$. $\square$

Antes de demostrar la parte d) del Tma 1 vamos a demostrar el siguiente resultado que por sí es fundamental:

# Tema 2 (Propiedades de sistemas de raíces)

Sea $\mathfrak{g}$ alg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$
$\Rightarrow \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ subalg. de Cartan
$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$ sist. de raíces,
Para cada $\alpha \in R$ sea $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ la coraíz correspondiente

a) Para $\alpha, \beta \in R$ tenemos

$$\underset{\beta(\alpha^\vee)}{\underset{\parallel}{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow s_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R$$

b) $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(R) = \mathfrak{h}^*$

Nota la expresión $s_\alpha$ de la parte a) define un mapeo

$$s_\alpha : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad \lambda \longmapsto \lambda + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

$\mathbb{C}$-lineal

Observamos que $s_\alpha$ fija los elementos del hiperplano

$$H_\alpha := \{ \lambda \in \mathfrak{g}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0 \}$$

(ojo: $\alpha \notin H_\alpha$ porque $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$)

Por lo mismo

$$s_\alpha(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle \alpha = -\alpha$$

$\therefore$ Podemos considerar a $s_\alpha$ como una reflexión en el hiperplano $H_\alpha$

que es "ortogonal" a $\alpha$,

y ~~la~~ llamamos a $s_\alpha$ la reflexión asociada a $\alpha \in R$.

Dem. del Tma 2

a) Consideramos para $\beta \in R \setminus \{\alpha, -\alpha\}$ (i.e. $\beta$ es lin. indep. de $\alpha$) el subespacio

$$T := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + i\alpha}$$

Este espacio es una $\mathfrak{g}^\alpha$-subrep. de $\mathfrak{g}$.

Todos los espacios propios de $\alpha^\vee|_T$ son a lo más de dim. 1

son valores propios diferentes

$$\langle \beta + i\alpha, \alpha^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle + 2i$$

y de multiplicidad 1.

$\in \mathbb{Z}$

por el Teorema 1 b),

$\therefore$ T es irred!

De nuestro conocimiento de las rep. irred. de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sabemos que $h = \alpha^\vee$ actúa por valores propios enteros sobre T

y si $n$ es un valor propio, $-n$

también lo es.

En particular $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$

corresponde a $\mathfrak{g}_\beta$

y $\mathfrak{g}_{\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha} \neq 0$

porque si ~~apli~~ evaluamos en $\alpha^\vee$ obtemos

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \underbrace{\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle}_{2} = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle$$

$\therefore$ corresponde a $-\langle \beta, \alpha \rangle$ $\square$

b) De álgebra lineal vemos que es suficiente demostrar

$$\boxed{\bigcap_{\alpha \in R} \ker(\alpha) = 0}$$

Para eso, sea $h \in \mathfrak{h}$ con $\alpha(h) = 0 \ \forall \alpha \in R$

Entonces $[h, g_\alpha] = 0 \ \forall \alpha \in R$

$$\left( [h, x] = \alpha(h) x \ \forall x \in g_\alpha \right)$$

Por otro lado

$$[h, \mathfrak{h}] = 0 \text{ triv.}$$

$$\Rightarrow h \in \mathfrak{z}(g) = 0 \quad (g \text{ s.s.})$$

$\square$

Dem. del Tma 1 d)

Con la notación de la dem. del Tma 2 todos los espacios propios de $\alpha^V|_T$ son de dim. 1,

$\Rightarrow$ todos los valores propios son ó todos pares ó todos impares.

$\Rightarrow$ T es efectivamente una rep. irreducible de $g^\alpha$,

De la descripción explícita de los repns de $sl_2(\mathbb{C}) \cong g^\alpha$ vemos

$$[g_\alpha, g_\beta] = x \cdot g_\beta = g_{\alpha+\beta}$$

$$\uparrow$$

$$\subset T$$

si $\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\} \subset R$

De los Teoremas 1 & 2 podemos abstraer la siguiente Def. importante:

**Def.** Sea $V$ un esp. vect. sobre un campo $k$ con $\mathrm{char}(k) = 0$

Un subconjunto $R \subset V$

se llama se llama

sistema de raíces abstracto

(y reducido) si cumple

(i) $R$ es finito, genera a $V$

y no contiene el $0$,

(ii) para todo $\alpha \in R$ existe

$s \in GL(V)$ con

$\cdot\, s(\alpha) = -\alpha$

$\cdot\, s(R) \subset R$

$s(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha \quad \forall \beta \in R$

(iii) $\forall \alpha \in R: \; k \cdot \alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$

**Teorema 3** Si asignamos a cada álgebra de Lie s.s. $/\mathbb{C}$ $\mathfrak{g}$ el espacio dual $\mathfrak{h}^*$ de un subálg. de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ junto con el sistema de raíces

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$$

entonces obtenemos una biyección

$$\{\text{alg. Lie s.s.}/\mathbb{C}\} /\cong \;\xrightarrow{\sim}\; \{\text{Sist. de raíz abst.}/\mathbb{C}\} /\cong$$

$$g \longmapsto R(g, f) \subset f^*$$

La dem. de este teorema nos va a ocupar un rato.

En 2.5 veremos que el mapeo por lo menos, está bien definido.

Antes de la dem. de la injectividad y suprayectividad tenemos que estudiar más a fondo los sistemas de raíz abstractos