2.5 Conjugación de subálg. de Cartan

Para ver que el mapeo del teorema 3 está bien definido vemos que todas las subálg. de Cartan de un alg. de L.s $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ están conjugadas bajo ciertos automorfismos de $\mathfrak{g}$.

Def.- Llamamos un $S \in \mathrm{End}_k(V)$ <u>localmente nilpotente</u> si para todo $v \in V$ existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $S^n(v) = 0$.

Si en este caso $\mathrm{char}(k) = 0$ podemos definir la exponencial de S

$$V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n(v)}{n!}$$

Lema 1 Sean V, W esp. vect. sobre un campo k con $\operatorname{char}(k) = 0$

a) Para el mapeo $0 \in \operatorname{End}_k(V)$ (mapeo 0) tenemos $\exp(0) = id_V$

$(0_V^0 = id_V)$

Si $\delta, \delta' \in \operatorname{End}_k(V)$ conmutan y son loc. nilpot., entonces

$\delta + \delta'$ es loc. nilpot y

$$\exp(\delta + \delta') = \exp(\delta) \circ \exp(\delta') = \exp(\delta') \circ \exp(\delta)$$

en particular

$$\exp(-\delta) = \exp(\delta)^{-1}$$

b) Un diag. conmutativo de mapeos k-lineales

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & W \arrow[d, "\delta'"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

con δ, δ' loc. nilpot. sigue conmutativo si aplicamos $\exp(-)$ a δ, a δ'

En particular, si f es invertible tenemos

$$\exp(f \delta f^{-1}) = f \exp(\delta) f^{-1}$$

c) Si $\delta \in \mathrm{End}_k(V)$ es nilpotente el mapeo dual correspondiente $\delta^T \in \mathrm{End}_k(V^*)$ también lo es $\Rightarrow$ $\exp(\delta^T) = \exp(\delta)^T$

Dem: Ejercicio. Pista usa la identidad
$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ en $k[[x,y]]$)

Obs: Si $\dim_k V < \infty$, entonces δ es loc. nilpot. $\Longleftrightarrow$ δ es nilpotente!

Lema 2 Sea k un campo con $\mathrm{char}(k)=0$, $\mathfrak{g}$ un alg. de Lie $/k$ y $\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ una derivación de $\mathfrak{g}$
$(\delta([x,y]) = [\delta(x),y] + [x,\delta(y)])$

que es localmente nilpotente. Entonces $\exp(\delta)$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$. En particular, si $\mathfrak{g}$ es de dim. finita, $x \in \mathfrak{g}$ es ad-nilpotente entonces

$\exp(\mathrm{ad}(x))$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$

porque $\mathrm{ad}(x)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$.

<u>Dem.</u> Sea $m : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $x \otimes y \mapsto [x,y]$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\delta \otimes id + id \otimes \delta"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\delta"] \\
\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \arrow[r, "m"] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

conmuta

porque δ es una derivación

Si δ es loc. nilpot., entonces

$\delta \otimes id + id \otimes \delta$ también lo es.

Por el Lema 1 nuestro diag. sigue

conmutativo después de aplicar exp(-)

a las columnas.

Además observamos que

$$(\delta \otimes id) \circ (id \otimes \delta) = \delta \otimes \delta = (id \otimes \delta)(\delta \otimes id)$$

~~si~~ concluimos del Lema 1

$$\exp(\delta \otimes id + id \otimes \delta) = \exp(\delta \otimes id) \circ \exp(id \otimes \delta)$$

$$\|$$

$$\exp(\delta) \otimes \exp(\delta) \quad \checkmark$$

Observemos que es una demostración muy formal que no ocupaba la id. de Jacobi.

<u>Prop:</u> Sea $\mathfrak{g}$ un álg. de Lie s.s./$\mathbb{C}$ y $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{K}$ subálg. de Cartan de $\mathfrak{g}$, entonces existe un automorfismo σ de $\mathfrak{g}$ con $\sigma(\mathfrak{K}) = \mathfrak{h}$.

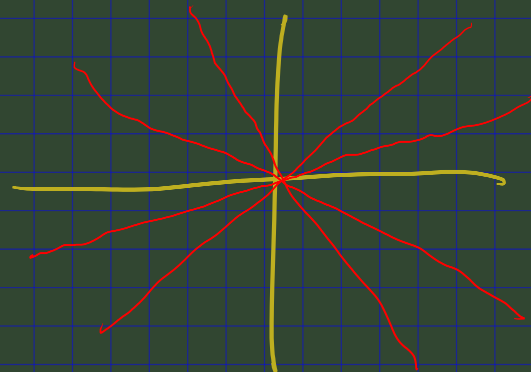
<u>Dem:</u> Sea

$$\mathfrak{h}_{reg} := \mathfrak{h} \setminus \Big(\bigcup_{\substack{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \\ \alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}}} \ker(\alpha) \Big) \subset \mathfrak{h}$$

es un subconjunto denso en la topología de Zariski

$[\dim \mathfrak{h} = 2$

$\mathfrak{h}$



$/ = \ker(\alpha)$ $]$

Para cada $h \in \mathfrak{h}_{reg}$ tenemos

$$\mathfrak{h} = \ker\left(ad_{\mathfrak{g}}(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\right)$$

$$\left[\ \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha\right.$$

$$\cup$$

$$x = x_{\mathfrak{h}} + \sum_{\alpha \in R} x_\alpha \qquad x_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}, \quad x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x) = [h, x_{\mathfrak{h}} + \sum_{\alpha\in R} x_\alpha]$$

$$= 0 + \sum_{\alpha\in R} \underbrace{\langle \alpha, h\rangle}_{\neq 0 \quad h\in \mathfrak{h}_{reg}} x_\alpha$$

si $x \notin \mathfrak{h}$ $\exists\, \alpha\in R$ con $x_\alpha \neq 0$

esta componente sobrevive

$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)(x)\dots$

Consideramos una enumeración

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell\} = R$$

y consideramos el mapeo

$$\eta : \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \mathfrak{g}_{\alpha_2} \times \dots \times \mathfrak{g}_{\alpha_\ell} \times \mathfrak{h}_{reg} \to \mathfrak{g}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_\ell, h) \longmapsto (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_1) \circ \cdots \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x_\ell))(h)$$

recordamos que para

$x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ es nilpotente

y estudiamos la diferencial

$$d\eta_{(0,0,\dots,0,h)}(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \dots, \varepsilon_\ell x_\ell, \varepsilon h')$$

$$= (\varepsilon_1 \alpha_1(h) x_1), \varepsilon_1 \alpha_2(h) x_2, \dots, \varepsilon h')$$

es decir, la diferencial es biyectiva en este punto!

cálculo $\Longrightarrow$ $\mathrm{Im}\,\eta \subset \mathfrak{g}$ es densa y consiste de elementos semisimples

Lo mismo lo podemos hacer con $\mathfrak{g}$

$$\eta' : \mathfrak{g}'_{\beta_1} \times \mathfrak{g}'_{\beta_2} \times \cdots \times \mathfrak{g}'_{\beta_n} \times \mathfrak{k}_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

exp ...

$(\{\beta_1, \ldots, \beta_m\} = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$

$\mathfrak{g}'_\beta$ esp. de raíz c.v. a $\mathfrak{k}$)

Como las dos tienen imagen densa en $\mathfrak{g}$, existen elementos

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_a, h) = \eta'(x'_1, \ldots, x'_m, k)$$

para ciertos

$(x_1, x_2, \ldots, x_l, h) \in \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \cdots \mathfrak{g}_{\alpha_l} \times \mathfrak{h}_{reg}$

$(x_1', \ldots, x_m', k) \in \mathfrak{g}'_{\beta_1} \times \cdots \mathfrak{g}'_{\beta_m} \times \mathfrak{K}_{reg}$

En otras palabras, con

con $\sigma = \exp(\mathrm{ad}(x_1)) \circ \cdots \exp(\mathrm{ad}(x_l))$

y $\tau = \exp(\mathrm{ad}(x_1')) \circ \cdots \circ \exp(\mathrm{ad}(x_m'))$

tenemos

$$\tau^{-1} \sigma(h) = k$$

$$\Longrightarrow \quad \tau^{-1} \sigma(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{K} \quad !$$

En efecto $\mathfrak{K} = \{ x \in \mathfrak{g} \mid [k, x] = 0 \}$

porque $k \in \mathfrak{K}_{reg}$

$$[\tau^{-1}\sigma(h'), \underbrace{\tau^{-1}\sigma(h)}_{\in \mathfrak{h}_{reg}}] = 0 \quad h' \in \mathfrak{h}$$

Similar $\sigma^{-1}\tau(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^{\tau^{-1}\sigma}$ es isom.

$\square$