3. Grupos de Reflexiones y sistemas de raíces

3.0 Resumen y motivación

Sea $\mathfrak{g}$ un álg. de Lie s.s. /$\mathbb{C}$

$\cup$

$\mathfrak{h}$ subálg. de Cartan dim. 1

Sabemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*[\varepsilon]} \mathfrak{g}_\alpha$ (*)

$\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ centralizador de $\mathfrak{h}$

la forma de Killing κ

$t : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$

$\kappa(\alpha, \beta) := \kappa(t_\alpha, t_\beta)$

$\varphi^\alpha : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \alpha^\vee \in \mathfrak{h}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

Ej: $\alpha^\vee = \dfrac{2t_\alpha}{\kappa(\alpha,\alpha)}$

$\Rightarrow \langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha, \beta \in R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ s_\alpha(\beta) := \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in R \\ \qquad \forall \alpha, \beta \in R \end{array} \right.$$

$\cdot$ $\mathfrak{h}^* = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$

$\Rightarrow \mathfrak{h} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\alpha^\vee \mid \alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ es generado (como alg. de Lie) de los x_α $\forall$ ($\alpha \in R$)

Propiedades de positividad y racionalidad

Por el isomorfismo $t : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$

jalamos $\mathcal{K}$ a $\mathfrak{h}^*$

$$\mathcal{K}(\lambda, \mu) := \mathcal{K}(t_\lambda, t_\mu) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$$

Podemos tomar una base $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{g}^*$ formada de ciertos el. de R

y podemos escribir $\beta \in \mathfrak{g}^*$ como

$$\sum_{i=1}^{\ell} b_i \alpha_i \quad \text{con } b_i \in \mathbb{C}$$

· Afirmamos $\beta \in R$

$\Rightarrow b_i \in \mathbb{Q} \quad \forall i = 1, \ldots, \ell$

Dem.

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{\ell} b_i (\alpha_i, \alpha_j) \quad \Big| \cdot \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$

$$\Vert \qquad\qquad\qquad\qquad \Vert$$

$$\langle \beta, \alpha_j^\vee \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \underbrace{\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\in \mathbb{Z}$$

y la matriz $\left(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle\right)_{i,j=1,\dots,\ell}$

es invertible porque X es

Y $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ son base
única

$\Rightarrow$ Los b_i son sol. de un sistema de ecn. lin. con coeficientes enteros

$\Rightarrow$ $b_i \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$

Tam biến : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$

$\forall \alpha, \beta \in R$

$\geq (\beta, \beta) > 0 \quad \forall \beta \in R$

Em nazana $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$

$$(\lambda, \mu) := \mathcal{K}(t_\lambda, t_\mu) \overset{!}{=} \sum_{\alpha \in R} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)$$

razón: $t_\lambda \in \mathfrak{h}$)

si tomamos una base de $\mathfrak{g}$

formada de los x_α $\alpha \in R$

\+ base de $\mathfrak{h}$

matr. de

$\operatorname{ad}(t_\lambda)$ ~~en~~ esta base

$$\operatorname{diag}\left(\alpha(t_\lambda)_{\alpha \in R}, 0, \dots, 0 \right)$$

en particular

$$(\beta,\beta) = \sum_{\alpha\in R} (\alpha,\beta)^2 \quad \Big| \frac{1}{(\beta,\beta)^2}$$

$$\frac{1}{(\beta,\beta)} = \sum_{\alpha\in R} \underbrace{\left(\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\right)^2}_{\in\mathbb{Q}}$$

para $\beta \in R$ $\qquad \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\beta,\beta) \in \mathbb{Q}_{>0} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\mathbb{Q}$!

Podemos considerar

$$E_{\mathbb{Q}} := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(R) \subset \mathfrak{g}^*$$

es un espacio vect. de dim finita sobre $\mathbb{Q}$ con

$$\dim E_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$$

y la restricción de $(-,-)$ de $\mathfrak{g}^*$ a $E_{\mathbb{Q}}$ tiene valores en $\mathbb{Q}$ y nos. def.

Lo importante es que

$$\mathbb{R} \subset E_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{E}^*$$

y $\cdot(-,-) : E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$

es pos. def.

sea $E := E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$

es un esp. euclideano

Teorema (Clave)

a) $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} R = E$ es un esp euclídeo $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$

b) $\forall \alpha \in R \Rightarrow \mathbb{R}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}$

c) $\forall \alpha, \beta \in R \quad s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in R$

d) $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} := (\beta,\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$

$\square$

Lo que sigue del cap. 3 se basa en los cap 9 y 10 del libro de Humphreys

E será para el resto del cap. 3 un esp. euclideano con $(-,-)$

Lo podemos identificar con
$\mathbb{R}^n$ y el producto escalar.

$$x \cdot y := \sum x_i y_i$$

Una reflexión ~~en~~ s en E
es un elemento $s \in O(E)$
que fija un hiperplano $H_s \subset E$
$s \neq id$

Es fácil ver que para $\alpha \perp H_r$ ($\alpha \neq 0$) se tiene

$$r = r_\alpha = id_E - \frac{2(-,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \cdot \alpha$$

En este contexto nos conviene definir $\alpha^\vee := \dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$

(aquí $\alpha^\vee \in E$ y <u>no</u> $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ como en 2.!)

Lema Sea $\underline{\Phi} \subset E$ finito

con $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\underline{\Phi}) = E$

$\exists$ s unipotentes $s_\alpha(\underline{\Phi}) = \underline{\Phi}$ $\forall \alpha \in \underline{\Phi}$

Si tenemos $\sigma \in GL(E)$ con

- $\sigma(\underline{\Phi}) = \underline{\Phi}$
- $\sigma(h) = h$ $\forall h \in H$ hiperplano $\subset E$
- $\exists \alpha \in \underline{\Phi}$ con $\sigma(\alpha) = -\alpha$

$\Rightarrow \; \sigma = \sigma_\alpha$

<u>Dem</u> Alg. Lineal [H, 9.1] $\square$

<u>3.2 Sistemas de raíces (abstr.)</u>

<u>Def.</u> $\Phi \subset E$ es <u>un sistema de raíces</u> (abstracto) si

(R1) Φ finito, $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\Phi) = E$, $0 \notin \Phi$

(R2) $\forall \alpha \in \Phi$: $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

(R3) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, $s_\alpha(\beta) \in \Phi$

(R4) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ $(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$

Obs los axiomas son un tanto

Redundantes:

$(R2) \Rightarrow \Phi = -\Phi \Leftarrow (R3)$

Sea $\Phi \subset R$ sist. de raíces definimos

$W := \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle < O(E)$

es el grupo de Weyl de Φ

Ojo: W es finito! $W < \mathcal{S}(\Phi)$