Rec. **Def**

$\Phi \subset E$ esp. euclideano.

sist. de raíces si

(R1) Φ finito, $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Phi) = E$, $0 \notin \Phi$

(R2) $\alpha \in R$: $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$

(R3) $\alpha, \beta \in R$: $s_\alpha(\beta) \in R$

(R4) $(\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}$

$$W := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle \subset O(E)$$

$$\Rightarrow W < \mathfrak{S}(\Phi)$$

Lema Sea $\Phi \subset E$ sist. raíces

$\varphi \in GL(E)$ con $\varphi(\Phi) \subset \Phi$

$\varphi \, \sigma_\alpha \, \varphi^{-1} = \sigma_{\varphi(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Phi$

$\Rightarrow (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee)$

$\forall \alpha, \beta \in \Phi$

$\square$

$\varphi : (\Phi, E) \longrightarrow (\Phi', E')$ hom.

de sist. de raíces si

φ ~~es~~ $E \xrightarrow{\sim} E'$ isom. $\mathbb{R}$-lineal con $\varphi(\underline{\Phi}) = \underline{\Phi}'$

cos $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)^\vee) = (\alpha, \beta^\vee)$
$\forall\ \alpha, \beta \in \underline{\Phi}$

<u>Ojo</u>: no podemos que φ sea una isometría de espacios euclídeanos!

si $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $t \cdot \underline{\Phi} := \{ t\alpha \mid \alpha \in \underline{\Phi} \}$ es isomorfo a $\underline{\Phi}$!

- con Φ también

$$\Phi^\vee := \{ \alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi \}$$

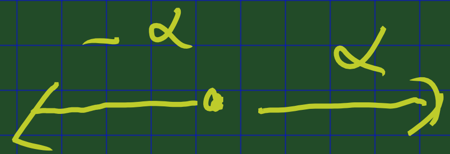
también es sist. de raíces!
(el sistema dual)

3.3. Ejemplos. Sea $\ell := \dim_{\mathbb{R}} E$
se llama el <u>rango</u> de Φ.

para $\ell \leq 2$ es fácil visualizar
los sistemas de raíces.

$\underline{l=1}$ Salvo isomorfía hay un solo sistema de rango 1:

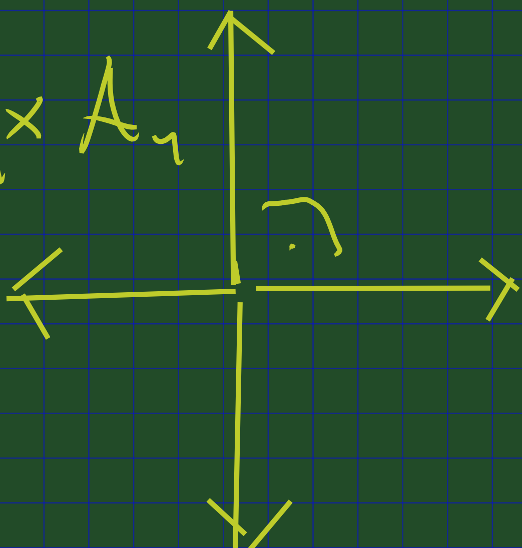
A_1



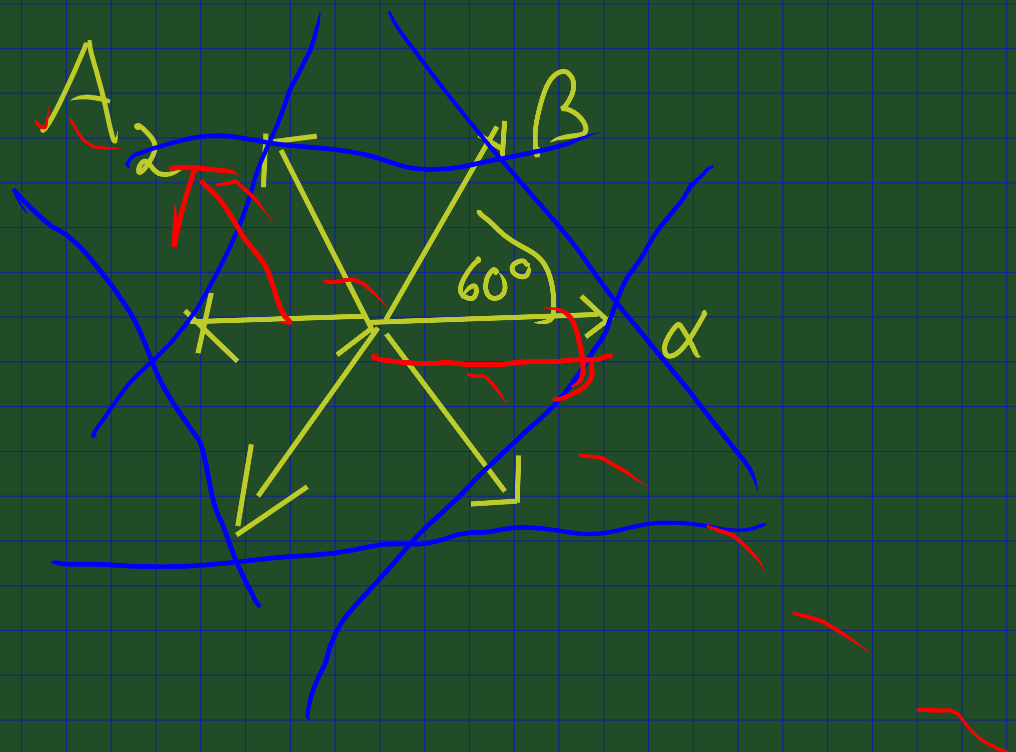
$\subset \mathbb{R}$

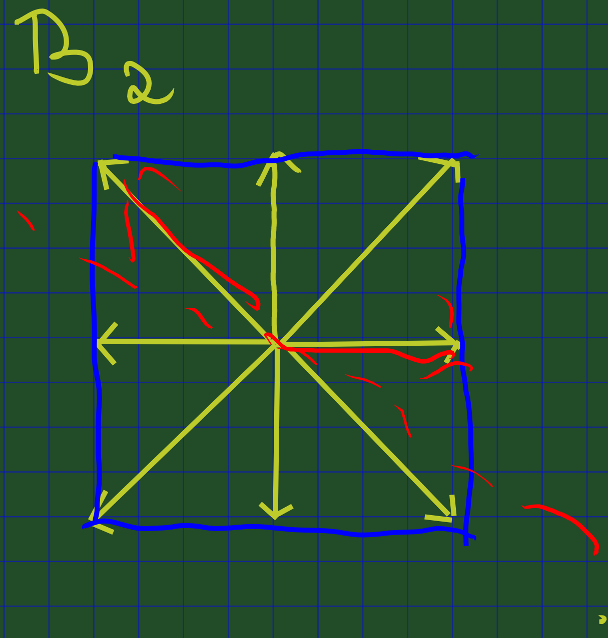
$\underline{l=2}$ Afirmamos que hay 4 posibilidades

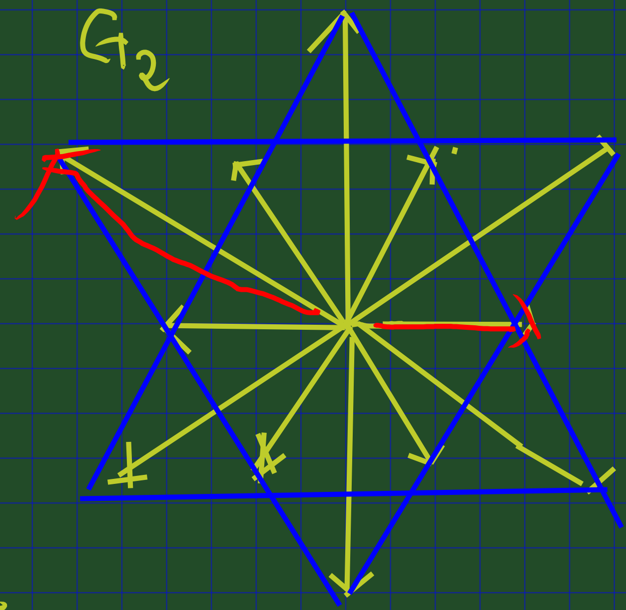
$A_1 \times A_1$



A_2





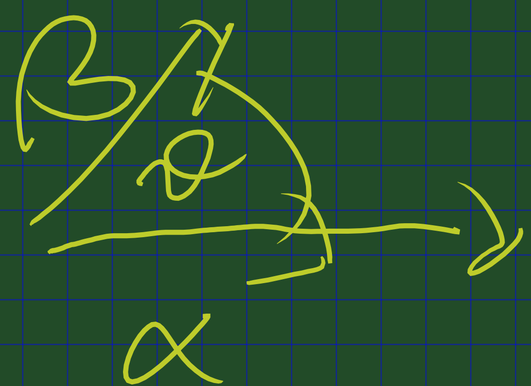


Ejercicio verificar que no hay más sist. de rango 2 y que estos son sist. de raíces

3.4 Parejas de raíces

El axioma (R4) limita seriamente los ángulos posibles entre dos raíces

Rec



$$\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos(\vartheta) = (\alpha, \beta)$$

en nuestro contexto

$$(\beta, \alpha^\vee) = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

$$= 2\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\cos(\vartheta)$$

$$\Longrightarrow$$

$$(\alpha, \beta^\vee)\cdot\underbrace{(\beta,\alpha^\vee)}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{4\cos(\vartheta)^2}_{\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

tomando en cuenta que signo de $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle$ y de $(\beta, \alpha^\vee)$ es igual solamente quedan las siguientes opciones:

$(\alpha, \beta^\vee)$	$(\beta, \alpha^\vee)$	ϑ	$\lVert\beta\rVert^2/\lVert\alpha\rVert^2$
0	0	$\pi/2$	undet
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

De esta tabla obtenemos el siguiente criterio útil:

<u>Lema</u> Sean $\alpha, \beta \in \Phi \subset E$ con $\alpha \notin \mathbb{R}\beta$

Si $(\alpha, \beta) > 0$ (i.e. angulo agudo) entonces $\alpha - \beta \in \Phi$

Si $(\alpha, \beta) < 0$ (angulo obtuso) $\Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi$

Dem. Es suficiente demostrar el primer caso!

tabla

$(\alpha,\beta)>0 \Rightarrow (\alpha,\beta^\vee)>0 \Rightarrow$

$(\alpha,\beta^\vee)=1$ ó $(\beta,\alpha^\vee)=1$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

$\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta \in \Phi$ $\qquad\qquad$ $\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Phi$

$\Rightarrow \alpha-\beta\in\Phi$

$\square$

Como aplicación vamos a considerar para $\alpha, \beta \in \Phi$ con $\alpha \notin \mathbb{R}\beta$ la α-cuerda de raíces que pasa por β i.e.:

$$\{\beta + i\alpha \mid i \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \beta + i\alpha \in \Phi\}$$

Sean $r, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ máximos t.q.

$$\beta - r\alpha \text{ y } \beta + q\alpha \in \Phi$$

El lema implica que entonces

$$\beta + i\alpha \in \Phi \quad \forall i = -r, -r+1, \dots, q-1, q$$

De hecho, si $\beta + i\alpha \notin \overline{\Phi}$ para algún $i \in [-r, q] \cap \mathbb{Z}$

$\exists \; p < n$ en $[-r, q] \cap \mathbb{Z}$ t.q.

$$\beta + p\alpha \in \overline{\Phi}, \quad \beta + (p+1)\alpha \notin \overline{\Phi}$$

$$\beta + (n-1)\alpha \notin \overline{\Phi}, \quad \beta + n\alpha \in \Phi$$

$-r$	p	$p+1$	$\ldots$	$n-1$	n	q
✓	✓	×		×	✓	✓

0

Lema: $(\alpha, \beta + p\alpha) \geq 0$
$(\alpha, \beta + r\alpha) \leq 0$

calculamos

$$0 \leq (\alpha, \beta + p\alpha) = (\alpha, \beta) + p(\alpha, \alpha)$$

$$0 \geq (\alpha, \beta + r\alpha) = (\alpha, \beta) + r\underbrace{(\alpha, \alpha)}_{>0}$$

$$p < r$$

También vale la pena observar que r_α simplemente revierte la α-cuerda que pasa por β!

En particular

$$\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$$

$$\Rightarrow \quad r - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$$

$\therefore$ la longitud de las α-cuerdas es acotado por 4

Para el resto del capítulo sea $\Phi \subset E$ un sist. de raíces de rango $\ell = \dim_{\mathbb{R}} E$ con grupo de Weyl $W < O(E)$

3,5 Bases y cámaras de Weyl

$\Delta \subset \Phi$ base (de Φ) $\iff$

(B1) Δ es una $\mathbb{R}$-base de E

(B2) $\forall \beta \in \Phi$ podemos escribir

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$$

con todos los $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ o

$||$ todos los $k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

En este caso llamamos los elementos de Δ las <u>raíces simples</u>

<u>Obs.</u>: • Si Δ es base
$\mathrm{card}(\Delta) = \ell = \mathrm{rk}(\Phi)$.

• Podemos definir la altura
$$ht(\beta) := \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \quad \text{c.r. a } \Delta$$

y podemos partir

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}^{+} \sqcup \overline{\Phi}^{-} \quad \text{donde}$$

$$\overline{\Phi}^{+} := \{ \beta \in \overline{\Phi} \mid ht(\beta) > 0 \}$$

$$\overline{\Phi}^{-} := \{ \beta \in \overline{\Phi} \mid ht(\beta) < 0 \}$$

obs $\beta \in \overline{\Phi}^{+} \Leftrightarrow \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \underbrace{z_\alpha}_{\geq 0} \alpha$

Podemos definir un orden parcial / E

$\beta < \alpha \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Delta$

en particular las el. de

$\mathbb{C}^+$ son > 0

$\mathbb{C}^-$ son < 0

2

¿Existen bases?