Rec.

$\Delta \subset \Phi \subset E$ base de Φ

$\Leftrightarrow$ (B1) Φ es una $\mathbb{R}$-base de E

(B2) $\forall \beta \in \Phi$: $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$

con $\forall k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ó $\forall k_\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$

En este caso, los elementos de Φ se llaman

raíces simples

⋮

Lema Si Δ es una base de Φ entonces

$(\alpha, \beta) \leq 0$ para $\alpha, \beta \in \Delta$ y $\alpha \neq \beta$

y $\alpha - \beta \notin \Phi$

· Dem: Claro: Si $(\alpha, \beta) > 0 \overset{\text{Lema } 3.4}{\Rightarrow} \alpha - \beta \in \Phi$ y (B2).

· Teorema Sea $\Phi \subset E$ sist. de raíces. Entonces Φ tiene una base.

Dem $\forall \gamma \in E \setminus \{0\}$ sea

$$\Phi^+(\gamma) := \{ \alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0 \}$$

· Geométricamente $\Phi^+(\gamma)$ consiste de las raíces que están situados en el "lado positivo" del hiperplano

$P_\gamma \perp \gamma$

- $E_{reg} := E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha \neq \emptyset$

elementos regulares de E.

Si $\gamma \in E_{reg}$ entonces

$$\Phi = \Phi^+(\gamma) \sqcup -\Phi^+(\gamma)$$

ya que en este caso $(\gamma, \alpha) \neq 0$ $\forall \alpha \in \Phi$ $\rightsquigarrow$ $\Phi \cap P_\gamma = \emptyset$

Vamos a suponer esto y elegimos

$\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ es <u>descomponible</u>

si $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ para $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$

Con esto es suficiente demostrar:

(*) Los elementos que no son descomp. en $\Phi^+(\gamma)$ forman una base de $\Delta(\gamma)$ de Φ y obviamente $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\Delta)$

Pasos para demostrar (*)

(1) $\Phi^+(\gamma) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \Delta(\gamma)$

el. indescomponible

De lo contrario existe

$$\alpha \in \Phi^+(\gamma) \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta(\gamma)$$

con (γ,α) mínimo entre estos elementos

Claro: $\alpha \notin \Delta(\gamma) \overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$

$\alpha = \beta_1 + \beta_2$ con $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$

$$\Rightarrow \underbrace{(\gamma,\alpha)}_{>0} = \underbrace{(\gamma,\beta_1)}_{>0} + \underbrace{(\gamma,\beta_2)}_{>0}$$

$$\Rightarrow (\gamma,\beta_i) < (\gamma,\alpha) \quad i = 1,2$$

$\Rightarrow \quad \gamma(\beta_1), \beta_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta(\gamma)$

$\Rightarrow \quad \alpha = \beta_1 + \beta_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta(\gamma)$ ↯

Q) $(\alpha, \beta) \in \Delta(\gamma) \Rightarrow (\alpha, \beta) \leq 0$

ó $\alpha = \beta$. (Lema en 3.4)

(3) $\Delta(\gamma)$ es lin. independiente

entonces (porque $\mathbb{R}$ es ordenado)

existe una expresión

$$\varepsilon = \sum_{\alpha \in \Delta'(\gamma)} r_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in \Delta''(\gamma)} r_\beta \beta$$

con $r_\alpha, r_\beta > 0$ $\Rightarrow$ $\Delta'(\gamma) \cap \Delta''(\gamma) = \emptyset$

Ahora

$$0 \leq (\varepsilon, \varepsilon) = \left(\sum r_\alpha \alpha, \sum r_\beta \beta \right)$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} \underbrace{r_\alpha r_\beta}_{>0} \underbrace{(\alpha, \beta)}_{\leq 0} < 0$$

$\Downarrow$ ...

(4) Como $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$

$\Rightarrow$ $\Phi^+ \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \Delta(\gamma)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\Phi) = E$ $\quad$ $\Delta(\gamma)$ es $\mathbb{R}$-base de E $\square$

Obs. Vale observar que toda base de Φ se puede obtener de esta forma!

Vale la pena de introducir un poco más de notación:

Las componentes conexas de

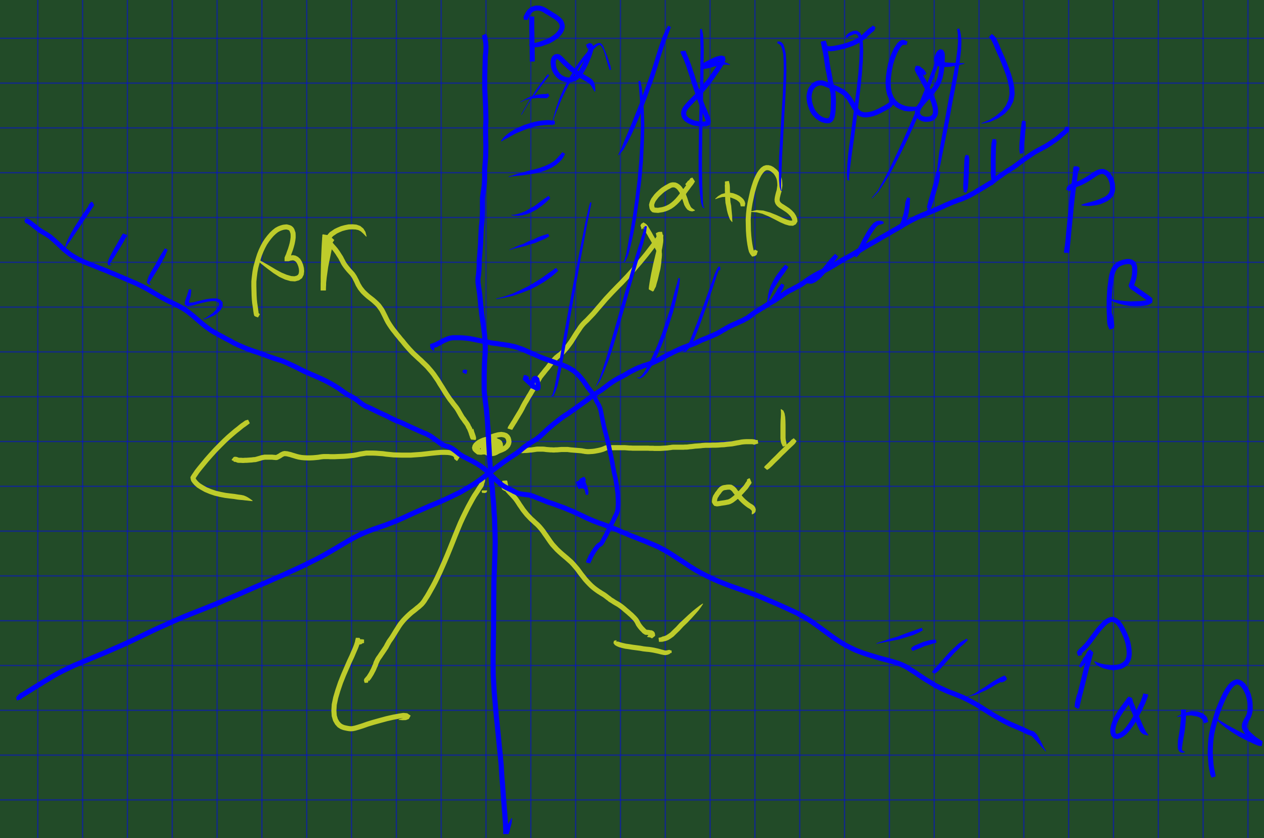
$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$$

se llama cámaras de Weyl

Ej A_2

$\Delta = \{\alpha, \beta\}$

6 cámaras de Weyl



Cada $\gamma \in E_{reg}$ pertenece a exactamente una cámara de Weyl

$\mathfrak{C}(\gamma)$ (C mayúscula en sütterlin)

$\mathfrak{L}(\gamma) = \mathfrak{L}(\gamma') \iff$

γ y γ' están del mismo lado de cada P_α $\forall \alpha \in \underline{\Phi}$

$\Rightarrow \underline{\Phi}^+(\gamma) = \underline{\Phi}^+(\gamma')$

$\Rightarrow \underline{\Delta}(\gamma) = \underline{\Delta}(\gamma')$

Obs,

$\Rightarrow$ Cámaras de Weyl

$\xleftrightarrow{1:1}$ bases de $\underline{\Phi}$

notación $\mathcal{L}(\Delta) = \mathcal{L}(\gamma)$

si $\Delta = \Delta(\gamma)$

la cámara fundamental de Δ.

Explícitamente:

$$\mathcal{L}(\Delta) = \{\gamma \in E \mid (\gamma, \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta\}$$

Obviament W permuta les les càmeres de Weyl

$$\sigma(\mathcal{L}(\gamma)) = \mathcal{L}(\sigma(\gamma))$$

$$\sigma \in W, \quad \gamma \in E_{reg}$$

W también permuta a las bases y las dos acciones son compatibles

$$\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$$

3.6 Resultados sobre raíces simples

Sea $\Delta \subset \Phi \subset E$ base raíces eucl.

Lema A Si $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$ entonces existe $\beta \in \Delta$ t.q. $\alpha - \beta \in \Phi^+$ $\square$

Cor. Si $\beta \in \Phi^+ \Rightarrow$

$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$

con $\alpha_i \in \Phi^+$ (noneces. diferentes)

t.q. $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_i \in \Phi^+$

$i = 1, 2, \dots, \ell$

(sigue por inducción del Lema A)

Lema B Sea $\alpha \in \Delta$

$\Rightarrow \sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$

Dem: $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$

$\Rightarrow k_\gamma > 0$ para algún $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$

Pero

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha^\vee) \cdot \alpha$$

$$= (k_\alpha - (\beta, \alpha^\vee))\alpha + \sum_{\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}} k_\gamma \gamma$$

Como $k_\gamma > 0$ para algún $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$

$\overset{(B2)}{\Longrightarrow}$ $(k_\alpha - (\beta, \alpha^\vee)) \geq 0$

$\Rightarrow$ $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ $\square$

<u>Cor</u> Con $\delta := 1/2 \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$

tenemos

$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$

$\square$

Lema C Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in \Delta$

(sucesión de raíces simples)

$\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ ("reflexiones simples")

Si $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) < 0$

entonces existe un r entre 1 y t,

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{r-1} \sigma_{r+1} \cdots \sigma_{t-1}$$

(es decir podemos omitir dos factores)

Dem. $\beta_i := \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$

$\beta_{t-1} = \alpha_t$

$\beta_0 < 0$, $\beta_{t-1} = \alpha_t > 0$

existe n mínimo t.q. $\beta_n > 0$

$\Rightarrow \sigma_n(\beta_n) < 0$

Lema C

$\Longrightarrow$ $\beta_n = \alpha_n$

Por otro lado $\forall\ \omega \in W$

$$\omega \sigma_\alpha \omega^{-1} = \sigma_{\omega(\alpha)}$$ Lema en 3.2 en part

$$\sigma_n = \underbrace{(\sigma_{n+1} \sigma_{n+2} \cdots \sigma_{t-1})}_{\omega} \sigma_t \underbrace{(\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{n+1})}_{\omega^{-1}}$$

$$\omega(\alpha_t) = \alpha_n$$

$$\Longrightarrow \sigma_n \sigma_{n+1} \cdots \sigma_{t-1} = \sigma_{n+1} \cdots \sigma_{t-1} \sigma_t$$

$\Longrightarrow$ afirmació.