

3.7. El grupo de Weyl

1. Teorema Sea Δ una base de de $\underline{\Phi} \subset E$

7 $W := \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle \leq O(E)$ el grupo de
V. Veje de Φ .

a) Para todo $y \in E_{\text{reg}} = E \setminus (\bigcup_{\alpha \in \underline{\Phi}} P_\alpha)$

existe $\sigma \in W$ t.q. $(\sigma(y), \alpha) > 0 \forall \alpha \in \Delta$

b) Si Δ' es otra base de $\underline{\Phi}$, entonces
existe $\sigma \in W \mid \sigma(\Delta') = \Delta$

c) $\forall \alpha \in \underline{\Phi}$ existe $\sigma \in W$ con $\sigma(\alpha) \in \Delta$

d) $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$

e) $\sigma(\Delta) = \Delta$ para $\sigma \in W \Rightarrow \sigma = 1_W$

Obs. b) + e): W actúa de forma 1-transitiva

sobre las bases de Δ (y sobre las cámaras de Weyl)

Dem. Sea $W' := \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle < W$

subgrupo generado por las refl. simples

Vamos a demostrar a) - c) para W' en lugar de W y luego concluiremos $W' = W$.

a) Sea $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \bar{\Phi}^+} \alpha$ y $\sigma \in W'$ t.q.

$(\sigma(\gamma), \delta)$ sea máximo (W' es finito)

Para todo $\alpha \in \Delta$ trivialmente $\sigma_\alpha \sigma \in W'$

$$\stackrel{\max}{\Rightarrow} (\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta))$$

$$\stackrel{3.6. Cor B}{=} (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

$$\Rightarrow (\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0 \quad \stackrel{\gamma \in E_{\text{red}}}{\Rightarrow} (\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{L}(\gamma)) = \mathcal{L}(\Delta).$$

$$b) \text{ sigue de a) + } \Delta \stackrel{1:1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(\Delta)$$

c) Por b) es suficiente demostrar que $\alpha \in \Delta'$ para alguna base Δ' de Φ .

$$\exists \gamma \in P_\alpha \setminus \left(\bigcup_{\beta \in \Phi \setminus \{\alpha, -\alpha\}} P_\beta \right)$$

$$\Rightarrow \exists \gamma' \text{ "cerca de" } \gamma \text{ t.q.}$$

$$(\gamma', \alpha) = \varepsilon > 0 \quad \wedge \quad |(\gamma', \beta)| \geq \varepsilon \quad \forall \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha, -\alpha\}!$$

$$\Rightarrow \alpha \in \Delta(\gamma').$$

d) Tenemos que demostrar:

$$\sigma_\alpha \in W' \quad \forall \alpha \in \underline{\Phi}$$

Por c) $\exists \omega \in \mathcal{W}' : \beta = \omega(\alpha) \in \Delta$

$$\Rightarrow \sigma_\beta = \omega \sigma_\alpha \omega^{-1} \in \mathcal{W}'$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha = \omega^{-1} \sigma_\beta \omega \in \mathcal{W}'$$

e) Sea $\sigma \in \mathcal{W} \setminus \{1\}$ con $\sigma(\Delta) = \Delta$

(i.e. σ permuta los elementos de Δ)

$$\stackrel{d)}{\sigma} = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_q} \text{ con } \alpha_i \in \Delta$$

de forma mínima

3.6. Cor c

$$\Rightarrow \sigma(\alpha_2) \prec 0$$



□

Ahora podemos usar los Lemmas de 3.6 para explorar más a fondo el hecho

que $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$

Para cada $\sigma \in \mathcal{W}$, escrito como

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2} \dots \sigma_{\alpha_\ell} \quad \text{con } \alpha_i \in \Delta \quad \forall i$$

ℓ con el mínimo número de reflexiones
simples

$\ell = \ell(\sigma)$ se llama la longitud de σ

acordamos $\ell(1) = 0$.

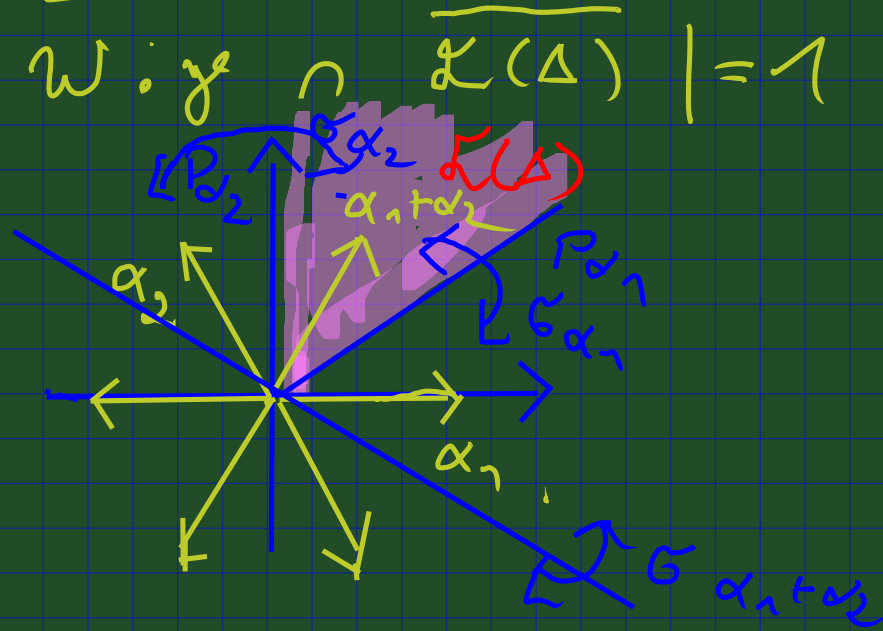
Lema A $\forall \sigma \in \mathcal{W} : \ell(\sigma) = |\{\alpha \in \Phi^+ \mid \sigma(\alpha) \in \Phi^-\}|$

Dem: [Humphreys, Sec. 10.3]

Sea $\overline{\mathcal{L}(\Delta)}$ la cerradura de $\mathcal{L}(\Delta) \subset E$
en la topología usual de E

El siguiente Lema dice que $\overline{K(\Delta)}$ es
 un dominio fundamental para la acción
 de W / E
 i.e. $|W \cdot \gamma \cap \overline{K(\Delta)}| = 1 \quad \forall \gamma \in E$

[ejemplo]



Lema B Para $\lambda, \mu \in \overline{K(\Delta)}$ y $\sigma \in W$

con $\sigma(\lambda) = \mu$, tenemos que σ es
 producto de reflexiones simples σ_α ($\alpha \in \Delta$)

con $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda \implies \lambda = \mu$. $\square$

[Humphreys, Sec. 10.3]

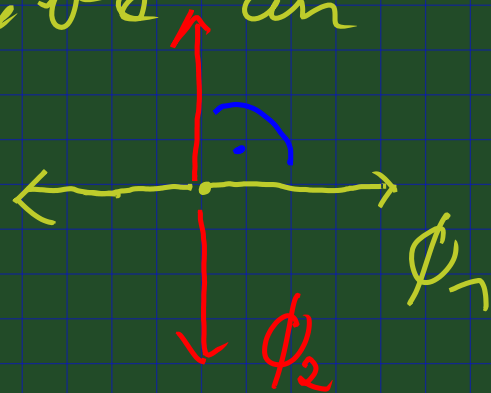
3.3. Sistemas de raíces irreducibles

Def. $\Phi \subset E$ es irreducible si

$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ t.q. } \Phi_1 \perp \Phi_2$$

implica $\Phi_1 = \emptyset$ o $\Phi_2 = \emptyset$.

Por ejemplo, los sistemas de raíces de rango 2 son irreducibles, con excepción de $A_1 \times A_1$:



Afirmamos, que es chequear irred para una base Δ de Φ i.e.

$$\underline{\Phi} \text{ irred} \Leftrightarrow (\Delta = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2 \text{ con } \Delta_1 \perp \Delta_2 \\ \Rightarrow \Delta_1 = \emptyset \text{ o } \Delta_2 = \emptyset.)$$

Lema A Sea $\underline{\Phi} \subset E$ sist de raíces irred

con base Δ . Con respecto a α existe una única raíz máxima $\beta \in \underline{\Phi}^+$. En part

$$\underline{\Phi} \ni \alpha \neq \beta \Rightarrow \text{ht}(\alpha) \leq \text{ht}(\beta) \text{ ,}$$

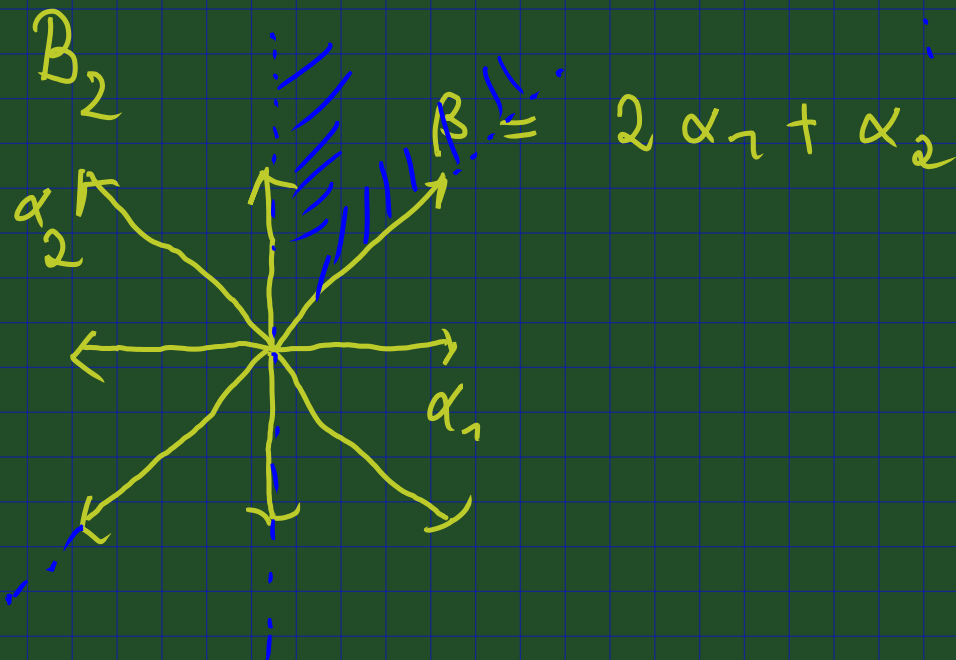
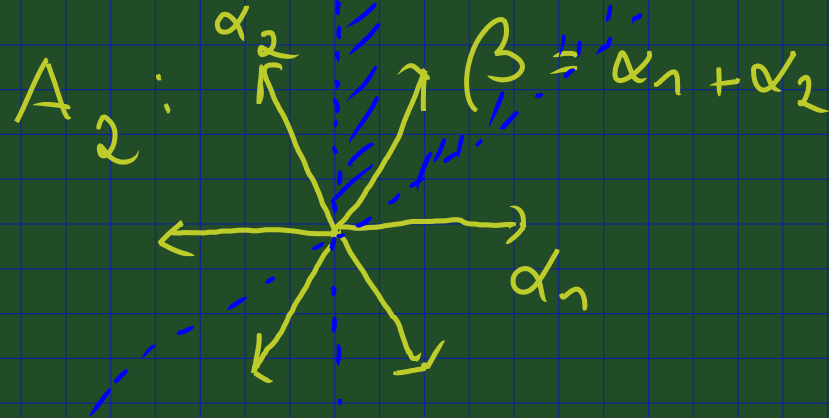
$$\bullet (\beta, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \quad (\text{i.e. } \beta \in \overline{\Sigma(\Delta)})$$

$$\bullet \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_{\alpha} \alpha \Rightarrow k_{\alpha} > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$$

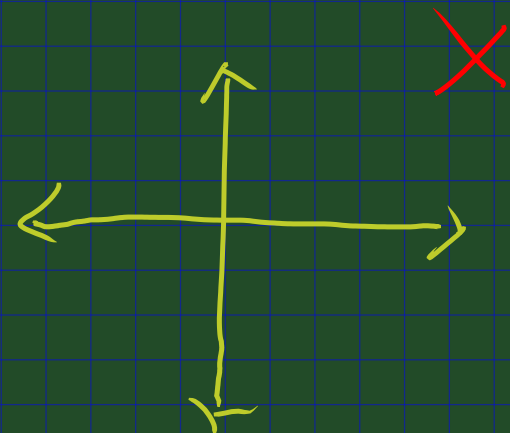
[Humphreys, Sec. 10.4]

□

Eximplor



$A_1 \times A$



$$A_n: \{ \varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j \} \subset E = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varepsilon_i \mid \sum a_i = 0 \right\}$$

$$\Delta = \{ \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \}$$

$$\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1} = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$$

$$\begin{aligned} & \sum a_i = 0 \\ & \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Lema B Sea $\Phi \subset E$ irred. Entonces W actúa de forma irreducible sobre E (i.e. $E' \subset E$ con $W(E') = E' \Rightarrow E' \in \{0, E\}$)
En particular, para cada $\alpha \in \Phi$, la órbita $W\alpha$ contiene una $\mathbb{R}$ -base de E .
[Humphreys, Sec. 10.4] $\square$

Lema C Sea $\Phi \subset E$ irred. Entonces a lo más dos longitudes $(\alpha, \alpha)^{1/2}$ diferentes ocurren entre las raíces α de Φ .
Además, todas las raíces de una longitud determinada están

Conjugadas bajo $\mathcal{W}$,

Dem. Sean $\alpha, \beta \in \Phi \xrightarrow{\text{inv. Long } B}$

o sea $\mathbb{R}(W\alpha) = E \Rightarrow \exists G \in \mathcal{W}: (G(\alpha), \beta) \neq 0$
Tabla $\Rightarrow \frac{(G(\alpha), G(\alpha))}{(\beta, \beta)} \in \{1, 2^{\pm 1}, 3^{\pm 1}\}$

si hubiera una tercera longitud, también
3/2 entre entre los ratios de long.

Si $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$, nuevamente podemos
suponer $(\alpha, \beta) \neq 0$

$\Rightarrow$ Tabla $(\alpha, \beta^\vee) = (\beta, \alpha^\vee) = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}, 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_\alpha G_\beta G_\alpha(\beta) &= G_\alpha G_\beta(\beta - \alpha) \\ &= G_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha \quad \square \end{aligned}$$

Por eso, en un sist. irred. de raíces $\underline{\Phi}$, podemos hablar de las raíces "cortas" y "largas". Si nada más hay una longitud, la convención es que todas las raíces son largas.

Lema D Si $\underline{\Phi} \subset E$ es irred, entonces la raíz más alta β c.r. a una base $\underline{\Delta}$ es larga.

