

3.9 La matriz de Cartan

Sea $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e\}$ una base de nuestro sist. de raíces Φ de rango l

La matriz $((\alpha_i, \alpha_j^\vee))_{i,j=1,\dots,e} \in \mathbb{Z}^{e \times e}$ se llama la matriz de Cartan de Φ

Ejemplos $A_1 \times A_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Est matriz es salvo permutación
simultánea de renglones y columnas
independiente de la selección de Δ

por el Teorema en 3, 7

(todas las bases están conjugadas bajo w)

- Las entradas diagonales siempre son 2 y las entradas fuera de la diag son de la forma $-3, -2, -1, 0$

- En el caso A_n obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & -1 & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matriz de Cartan es invertible porque Λ es una $\mathbb{R}$ -base de E

- El siguiente resultado dice que la matriz de Cartan determina a Φ , salvo a isomorfismo.

Prop. Sea $\Phi' \subset E'$ otro sistema de raíces con base $\Delta' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_\ell'\}$.
 Si $(\alpha_i, \alpha_j^\vee) = (\alpha_i', \alpha_j'^\vee) \forall i, j = 1, \dots, \ell$
 entonces, la biyección $\alpha_i \mapsto \alpha_i'$ extiende (de forma única) a un isomorfismo $\mathbb{R}$ -lineal $\varphi: E \xrightarrow{\sim} E'$,
 que manda Φ a Φ' } es además un isomorfismo de sist. de raíces.

$$\text{i.e. } (\varphi(\alpha), \varphi(\beta)^\vee)' = (\alpha, \beta^\vee) \\ \forall \alpha, \beta \in \underline{\Phi}.$$

Dem. Claro $\exists!$ $\varphi: E \xrightarrow{\sim} E'$ $\mathbb{R}$ -lin

$$\text{con } \varphi(\alpha_i) = \alpha'_i \quad \forall i$$

Si $\alpha, \beta \in \Delta$, la hipótesis implica

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) &= \sigma_{\alpha'}(\beta') \\ &= \beta' - (\beta', \alpha'^\vee) \alpha' \\ &= \varphi(\beta) - (\beta, \alpha^\vee) \varphi(\alpha) \\ &= \varphi(\sigma_\alpha(\beta)) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ \sigma_\alpha \downarrow & \cap & \downarrow \sigma_{\varphi(\alpha)} \\ E & \xrightarrow{\varphi} & E' \end{array} \quad \forall \alpha \in \Delta$$

Por el teorema de 3.7, los grupos de Weyl W resp. W' son generados por los σ_α ($\alpha \in \Delta$) resp. $\sigma_{\alpha'}$ ($\alpha' \in \Delta'$)

$$\Rightarrow \quad \sigma \mapsto \varphi \sigma \varphi^{-1}, \quad W \rightarrow W'$$

es un isomorfismo de grupos

Ahora cada $\beta \in \underline{\Phi}$ es conjugado,

bajo W , a un el. de Δ (Tme en 3.7)

digamos $\beta = \sigma(\alpha)$ para algún

$$\alpha \in \Delta \quad \gamma \quad \sigma \in W$$

Esto implica que

$$\varphi(\beta) = \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{\in W'} \left(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{\in \Delta'} \right) \in \underline{\Phi}'$$

y la fórmula arriba para las reflexiones muestra que φ respecta a los números de Cartan.

□

En teoría debe ser posible, recuperar $\underline{\Phi}$ de la matriz de Cartan. En la práctica (y de Δ) podemos construir los

elementos de Φ a partir de Δ
y el construir sucesivamente
 α -cuerdas que pasan por una raíz
ya construida.

Por el Lema A de 3.6 así
clamos con total las raíces
positivas.

3.10. Gráficas de Coxeter y diagramas de Dynkin

Se lema que para $\alpha \neq \beta$ raíces
 $(\alpha, \beta^\vee) (\beta, \alpha^\vee) \in \{0, 1, 2, 3\}$

Si $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell\}$ es una base

de $\underline{I}$ (de rango l), definimos la
 gráfica de Coxeter con vértices
 $1, 2, \dots, l$ y con
 $(\alpha_i, \beta_j^\vee)$ $(\beta_j, \alpha_i^\vee)$ aristas
 entre $i > j$ ($i \neq j$)

Ejemplos $A_1 \times A_1$: $1 \quad 2$
 A_2 : $1 - 2$
 B_2 : $1 = 2$
 G_2 : $1 \equiv 3$

Es fácil ver que la gráfica
 de Coxeter determina al grupo de

Weyl de $\tilde{E}$ porque el orden
de $(\sigma_{\alpha_i}, \sigma_{\alpha_j})$ es
 $(\alpha_i, \alpha_j^{\vee})(\alpha_j, \alpha_i^{\vee})!$

Si en cambio cuando hay aristas
múltiples ^{entre i y j} (es decir si las longitudes
de α_i y α_j ~~son~~ son diferentes
no podemos saber cuál es más largo
que el otro.

Por eso, en el diag. de Dynkin
se agrega un símbolo " $>$ "
a las aristas múltiples

para esta información

$$B_2 \quad 1 \not\Rightarrow 2$$

$$G_2 \quad 1 \not\Leftarrow 2$$

$$F_4 \quad 1 - 2 \not\Rightarrow 3 - 4$$

Ej. tipo A_n

$$1 - 2 - \dots - (n-1) - n$$

Es fácil de ver que el

diag. de Dynkin de $\underline{\mathfrak{g}}$

es conexo $\Leftrightarrow \underline{\mathfrak{g}}$ es irred.

Teorema 1 Si $\Phi \subset E$ es un sistema irred. de raíces de rango l (con base Δ), su diagrama de Dynkin es uno de los siguientes (con l vértices)

$$A_l \quad (l \geq 1) \quad 1 - 2 - \dots - (l-1) - l$$

$$B_l \quad (l \geq 2) \quad 1 - 2 - \dots - (l-1) \neq l$$

$$C_l \quad (l \geq 3) \quad 1 - 2 - \dots - (l-1) \neq l$$

$$D_l \quad (l \geq 4) \quad 1 - 2 - \dots - (l-2) \begin{matrix} \nearrow^{(l-1)} \\ \searrow l \end{matrix}$$

$$E_l (l=6,7,8) \quad 1-3-\overset{2}{\underset{1}{4}}-5-\dots-l$$

$$F_4 \quad 1-2-\cancel{3}-4$$

$$G_2 \quad 1-\cancel{2}-3$$

Comentario las restricciones sobre l en los tipos A-D son para evitar repeticiones y/o no def.

- Para los tipos simplemente enlazados ($A_l, D_l, E_{6,7,8}$) la matriz de Cartan es simétrica

- (con entradas $0, -1$ fuera de la diag)
- Las matrices de Cartan de tipo B_2 y C_2 no transpuestas para F_4 cambiar al orientación de γ produce un sistema isomorfo con $\{1, 2\} \leftrightarrow \{3, 4\}$

Idea de la dem:

- (i) Estudiamos un espacio euclideo E de dimensión l con una $\mathbb{R}$ -base $B = \{e_1, \dots, e_l\}$ de vectores unitarios ($(e_i, e_i) = 1$)

$$b. q. (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0 \quad \forall \quad 4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$i, j \neq j$$

Por ejemplo, si $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \Phi \subset E$

base de sist. de raíces, entonces

$$\varepsilon_i := \frac{\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)^{1/2}} \quad \text{cumple estas condiciones}$$

vamos a decir, que tal base es $\mathbb{R}$ -admisibles.

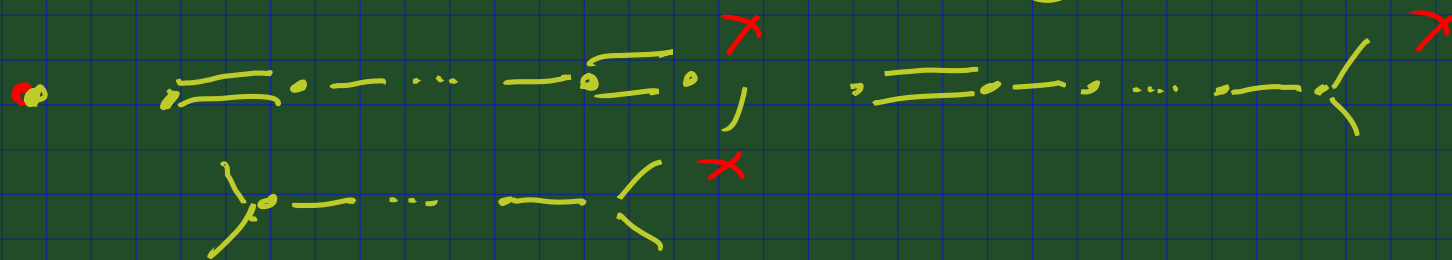
Tiene sentido de estudiar la gráfica de Coxeter

de bases admisibles y se observa que cualquier subconjunto $B' \subset B$ es una base admisible de $E' = \text{span}_{\mathbb{R}}(B')$.

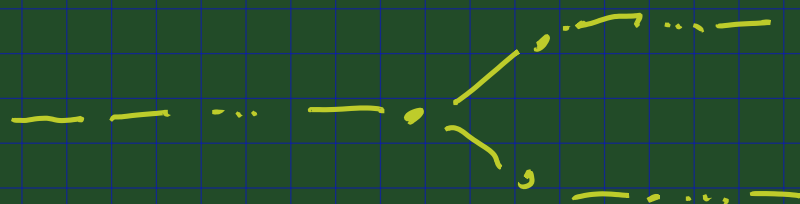
Después se descartan posibilidades usando que $(\varepsilon, \varepsilon) > 0 \quad \forall \quad \varepsilon \in E \setminus \{0\}$

• la gráfica no puede tener ciclos





$\Rightarrow$ solamente $\text{---} \circ \text{---} \text{---}$



Don ejemplos etc,
para irred

Teorema 2 Cada diagrama en Teorema 1 es efectivamente el diag. de Dynkin de un sistema de raíces.

Idea Consideramos en cada caso un espacio euclideo E , como por ejemplo

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i \varepsilon_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 0 \right\}$$

con una base "estándar" $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$

$$\gamma \quad \mathcal{I} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z} \varepsilon'_j \subset E \quad \text{retícula}$$

e.g. $(\varepsilon'_i, \varepsilon'_j) \in \mathbb{Z}$

$$\underline{\mathcal{C}} = \{ \alpha \in \mathcal{I} \mid (\alpha, \alpha) \in X \}$$

$$X = \{1\}$$

$$X = \{1, 2\}$$

$$X = \{1, 3\}$$

Details : [H; Sec. 12.1]

A, B, C, D ✓

$$E_{6,7,8} : (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i=j \quad (!) \\ -1 & i-j \\ 0 & \text{nos def.} \quad \text{otras casos} \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \{ \alpha \in \mathcal{I} \mid (\alpha, \alpha) = 1 \}.$$