4. Construcciones universales y existencia

4.1. Álgebras tensoriales y álgebras simétricas

F es un campo

Sea V un espacio vect $/F$ de dim. finita

$T^0 V := F$, $T^1 V := V$, $T^n V := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \geq 2}$

$$\tilde{S} V := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V$$

tiene una estructura de F-álg. asociativa y graduada por el producto tensorial

$$\underbrace{(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)}_{T^m V} \cdot \underbrace{(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)}_{\in T^n V}$$

$$:= \underbrace{v_1 \otimes \cdots v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{\in T^{m+n} V}$$

la mult. es asociativa por la asociatividad del producto $\otimes$

$(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$,

pero es altamente no conmutativo.

$\mathcal{T}V$ tiene la siguiente propiedad universal:

Si A es un F-alg. asoc. (con 1)

y $\varphi : V \longrightarrow A$ es F-lineal

entonces $\exists!$ $\tilde{\varphi} : \mathcal{T}V \longrightarrow A$

hom. de F-álgebras t. q.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{T}V \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}", "\exists!"'] \\
T^1 V \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] & A
\end{tikzcd}$$

idea:

$$\tilde{\varphi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdots \varphi(v_n)$$

Ahora, sea $I \subset \mathcal{T}V$ el ideal que es generado por todos los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x \quad \forall y, x \in V$

y sea

$$\sigma : \mathcal{T}V \twoheadrightarrow \mathcal{T}V / I =: \mathcal{S}V$$

el álgebra simétrica sobre V

como $\tilde{T}V$ es graduado, los generadores de I están en grado 2 concluimos

$$I = \bigoplus_{n \geq 2} \left(I \cap T^i V \right)$$

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\text{inyectivo}"'] & \tilde{T}V \arrow[r, two heads, "\sigma"] & SV \end{tikzcd}$$

$$(V \cap I = 0 \, !)$$

$\mathcal{S}V$ tiene la propiedad universal c.r. a álgebras conmutativas:

si B es un F-álg. conmutativo (asoc., con 1)

y $\psi : V \longrightarrow B$ es F-lin.,

$\exists$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{S}V \arrow[d, dashed, "\tilde{\psi}\ \exists !"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Si V tiene F-base $v_1, v_2, \dots, v_n$ entonces

$$S V \xrightarrow{\sim} F[X_1, \dots, X_n]$$
$$v_i \longmapsto X_i$$

<u>Obs.</u> (para su uso posterior)

El grupo simétrico $\mathcal{S}_m$ actúa sobre $T^m V$ por permutación de factores), es decir

$$\sigma \in \mathcal{S}_m, \quad \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)}$$

Si $t = \sum v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in T^m V$

es un punto fijo de esta acción, es decir

$$g \cdot t = t \quad \forall g \in \mathcal{S}_m$$

decimos que t es un tensor simétrico homogeneo de grado m.

Ejemplo $x \otimes y + y \otimes x \in T^2 V$

Si fijamos una base $v_1, \dots, v_n$ de V los tensores

$$v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n)$$

son una F-base de $T^m V$

(n^m elementos $n^m = \dim_F (V^{\otimes m})$)

Ahora, si $\mathrm{char}(F) = 0$ consideramos para cada sucesión ordenada

$$1 \le \underbrace{i_1 \le i_2 \le \dots \le i_m}_{I} \le n$$

podemos definir

$$v_I := \frac{1}{m!} \sum_{g \in S_m} v_{i_{g(1)}} \otimes v_{i_{g(2)}} \otimes \dots \otimes v_{i_{g(m)}}$$

$\mathrm{char}(F) = 0$!

y observamos que v_I es un tensor simétrico homogeneo de grado m para todo I como arriba y los $\sigma(v_I)$ forman una base de

$(\mathcal{S}\, V)_m$!

$$\sigma(v_I) = \cdots \quad x_1^{m_1} x_2^{m_2} \times \cdots \times x_n^{m_n}$$

si $I = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\quad n}_{m_n})$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{span}_F(v_I \mid_{I \ldots}) \oplus (I \cap T^m V)$$

$$= T^m V$$

4.2 Construcción de la envolvente universal de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$

Def. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie / F

Una envolvente universal $(\mathcal{U}, i)$ de $\mathfrak{g}$ consiste de un F-álg. asoc. (con 1) $\mathcal{U}$ y un mapeo F-lin

$$i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \text{t.q.}$$

$$(*) \quad i([x,y]) = i(x)\cdot i(y) - i(y)\cdot i(x)$$

$$\forall\ x, y \in \mathfrak{g}$$

tal que para cada álg. asociativo $\mathcal{A}$ y $j : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ con prop. $(*)$ existe un único hom. de álg. asoc. φ

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \mathcal{U} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \varphi"] \\ \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

$(\mathcal{A} = \mathrm{End}_F(V)!)$

Es fácil demostrar que "la" envolvente universal es única salvo isomorfismo canónico (si existe)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & U \arrow[d, dashed, shift right, "\exists! \varphi"'] \\ & U' \arrow[u, dashed, shift right, "\psi \exists!"'] \end{tikzcd}$$

por prop. universal

$$\left.\begin{aligned} i' &= \varphi i \\ i &= \psi i' \end{aligned}\right\} \Rightarrow i = \psi i' = (\psi\varphi) i$$

dos env. univ.

$\leadsto$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & U \arrow[d, "id"] \\ & U \end{tikzcd}$$

pero $\psi\varphi$ también hace conmutar.

pero por unicidad $id_{\mathcal{U}} = \psi\varphi \ldots$

- El siguiente paso es la existencia:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}\mathfrak{g} / \overbrace{\left\langle x\otimes y - y\otimes x - [x,y] \quad \forall x,y\in\mathfrak{g} \right\rangle}^{=:I}$$

alg. tensorial / $\mathfrak{g}$
como esp. vect.

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & \mathcal{T}\mathfrak{g} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd} \quad \text{alg. tensorial}$$

tiene la prop (*)

$x, y \in \mathfrak{g}$

$$i'([x,y]) \overset{?}{=} i'(x)\, i'(y) - i'(y)\, i(x)$$

Claro, porque

$$\underbrace{i(x) \otimes i(y)} - i(y) \otimes i(x) - [x,y] \in I$$

$$\pi(\quad) = i'(x)\, i'(y)]$$

Propiedad universal sigue de prop. universal de $T\mathfrak{g}$:

Sea $\mathfrak{g} \xrightarrow{j} A$ con propiedad $(*)$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "j"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\
T\mathfrak{g} \arrow[ur, dotted, "\exists!\, \varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

pero como j tiene propiedad (*)

$\Rightarrow$ $\ker(\varphi) \subset I$ ✓

$\supset$