

4. Construcciones universales y existencia

4.1. Álgebras tensoriales y álgebras simétricas

F es un campo

Sea V un espacio vect / F de dim. finita

$$T^0 V := F, \quad T^1 V := V, \quad T^n V := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \geq 2}$$

$$\tilde{S} V := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n V$$

tiene una estructura de F -álgebra.

asociativa y graduada por el

producto tensorial

$$\underbrace{(v_1 \otimes \dots \otimes v_m)}_{\in T^m V} \cdot \underbrace{(w_1 \otimes \dots \otimes w_n)}_{\in T^n V} = \underbrace{v_1 \otimes \dots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_n}_{\in T^{m+n} V}$$

la mult. es asociativa por la asociatividad del producto \otimes
 $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$,
pero es altamente no conmutativa.

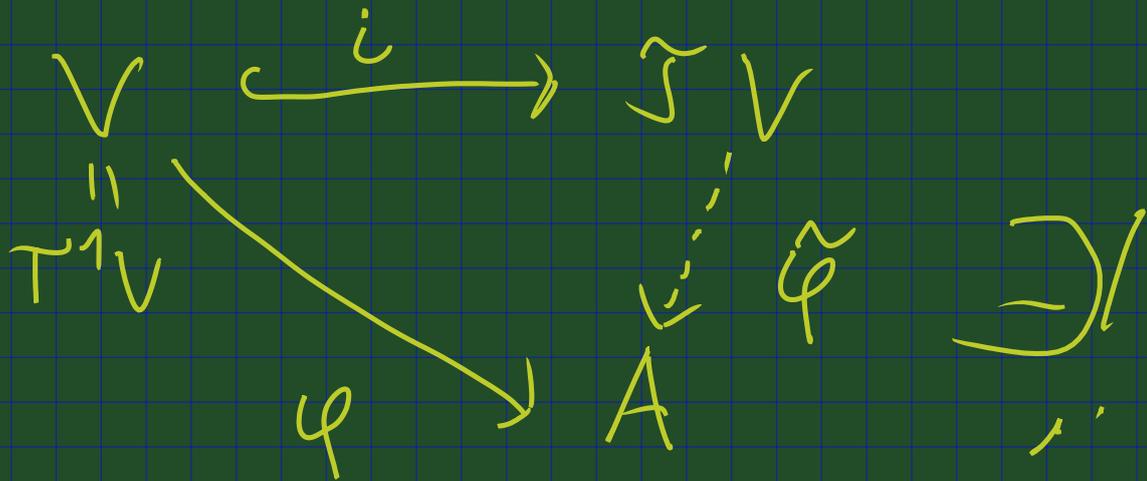
$\tilde{S}V$ tiene la siguiente propiedad universal:

Si A es un F -alg. asoc. (con 1)

y $\varphi: V \rightarrow A$ es F -lineal

entonces $\exists!$ $\tilde{\varphi}: \tilde{S}V \rightarrow A$

hom. de F -álgebra t. g.



idea:

$$\tilde{\varphi}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) := \varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \dots \cdot \varphi(v_n)$$

Ahora, sea $\underline{I} \subset \tilde{T}V$ el ideal que es generado por todos los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x \quad \forall y, x \in V$

y sea

$$\sigma: \tilde{T}V \rightarrow \tilde{T}V / \underline{I} =: \varphi V$$

↑
el álgebra simétrica
sobre V

como $\tilde{S}V$ es graduado, los generadores
de I están en grado 2 concluyendo

$$I = \bigoplus_{n \geq 2} (I \cap T^n V)$$

$$\Rightarrow V \xrightarrow{i} \tilde{S}V \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}V$$

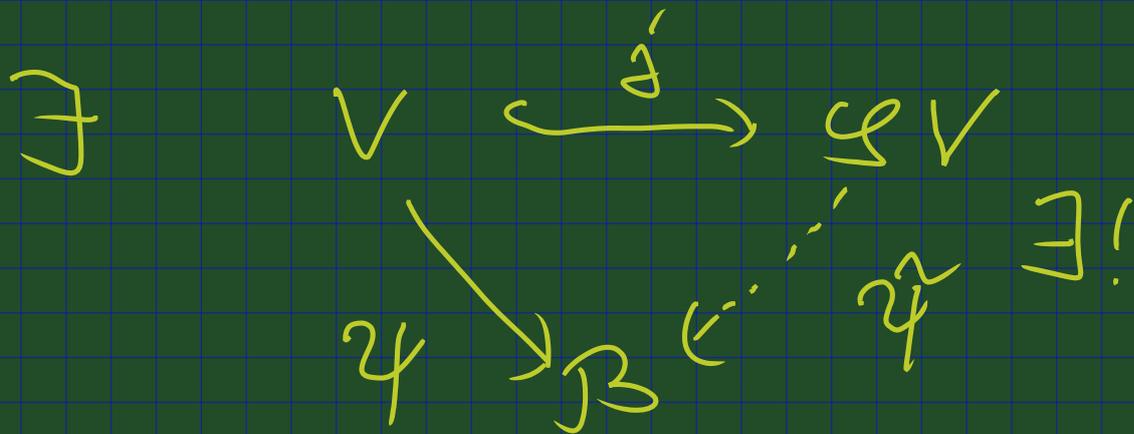
inyectivo

$$(V \cap I = 0!)$$

$\mathcal{U}V$ tiene la propiedad universal
c.r. a álgebras conmutativas:

si B es un F -álgebra conmutativa
(caso c., con 1)

$\exists \varphi: V \rightarrow B$ es F -lin.



Si V tiene F -base v_1, v_2, \dots, v_m
entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U}V &\xrightarrow{\sim} F[x_1, \dots, x_m] \\ v_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Obs. (para su uso posterior)

El grupo simétrico \mathcal{S}_m actúa

sobre $T^m V$ (por n permutación
de factores), es decir

$$\sigma \in \mathcal{S}_m, \quad \sigma \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}$$

Si $t = \sum v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in T^m V$

es un punto fijo de esta acción,
es decir

$$g \cdot t = t \quad \forall g \in \mathcal{F}_m$$

decimos que t es un tensor
simétrico homogéneo de grado m .

Ejemplo $x \otimes y + y \otimes x \in T^2 V$

Si hacemos una base v_1, \dots, v_n de V

los tensores

$$v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_m} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n)$$

son una F -base de $T^m V$
(n^m elementos $n^m = \dim_F (V^{\otimes m})$)

Ahora, si $\text{char}(F) = 0$ consideramos

para cada sucesión ordenada

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$$

podemos definir

$$v_{\underline{I}} := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} v_{i_{\sigma(1)}} \otimes v_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes v_{i_{\sigma(m)}}$$

$\text{char}(F) = 0!$

y observamos que $v_{\underline{I}}$ es un tensor
simétrico homogéneo de grado m
para todo \underline{I} como arriba

Y los $G(v_I)$ forman una base de
(de V)_m !

$$G(v_I) = \dots + x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_n^{m_n}$$

$$\text{ni } I = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{m_2}, \dots, \underbrace{n}_{m_n})$$

$$\Rightarrow \text{span}_F(v_I | I, \dots) \oplus (I \cap T^m V) = T^m V$$

—

4.2 Construcción de la envolvente universal de un álgebra de Lie \mathfrak{g}

Def. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie / F
Una envolvente universal (\mathcal{U}, i)
de \mathfrak{g} consiste de un F -álgebra asoc.
(con 1) \mathcal{U} y un mapa F -lin

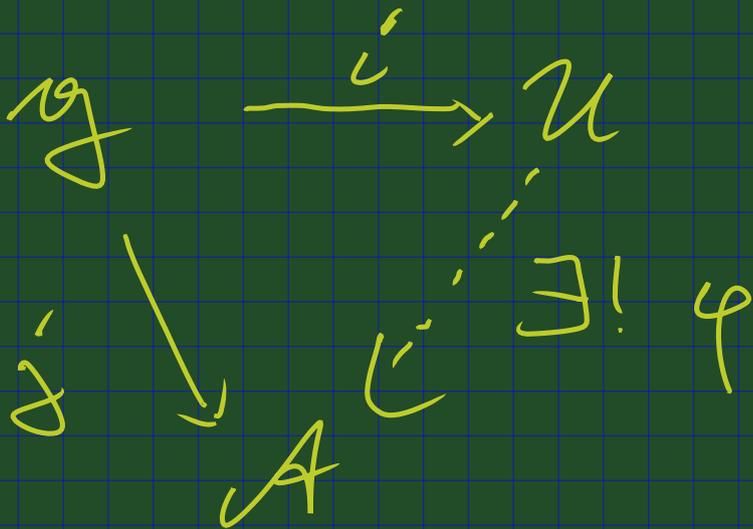
$$i: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U} \quad \text{t. q.}$$

$$(*) \quad i([x, y]) = i(x) \cdot i(y) - i(y) \cdot i(x) \\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

tal que para cada álgebra asociativa

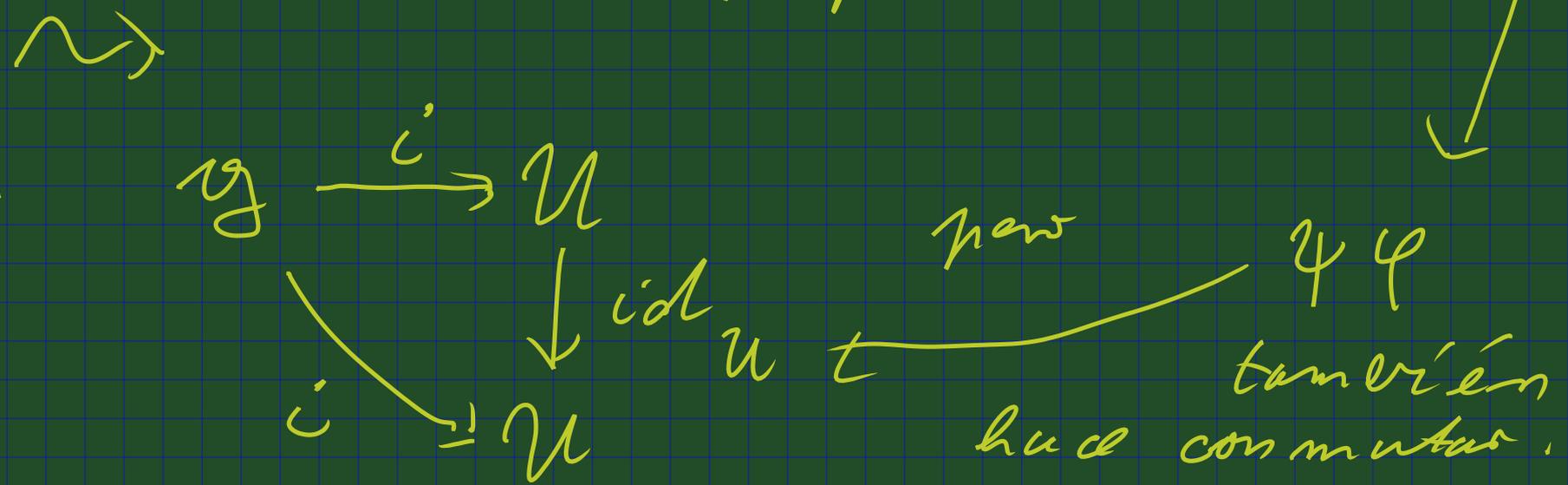
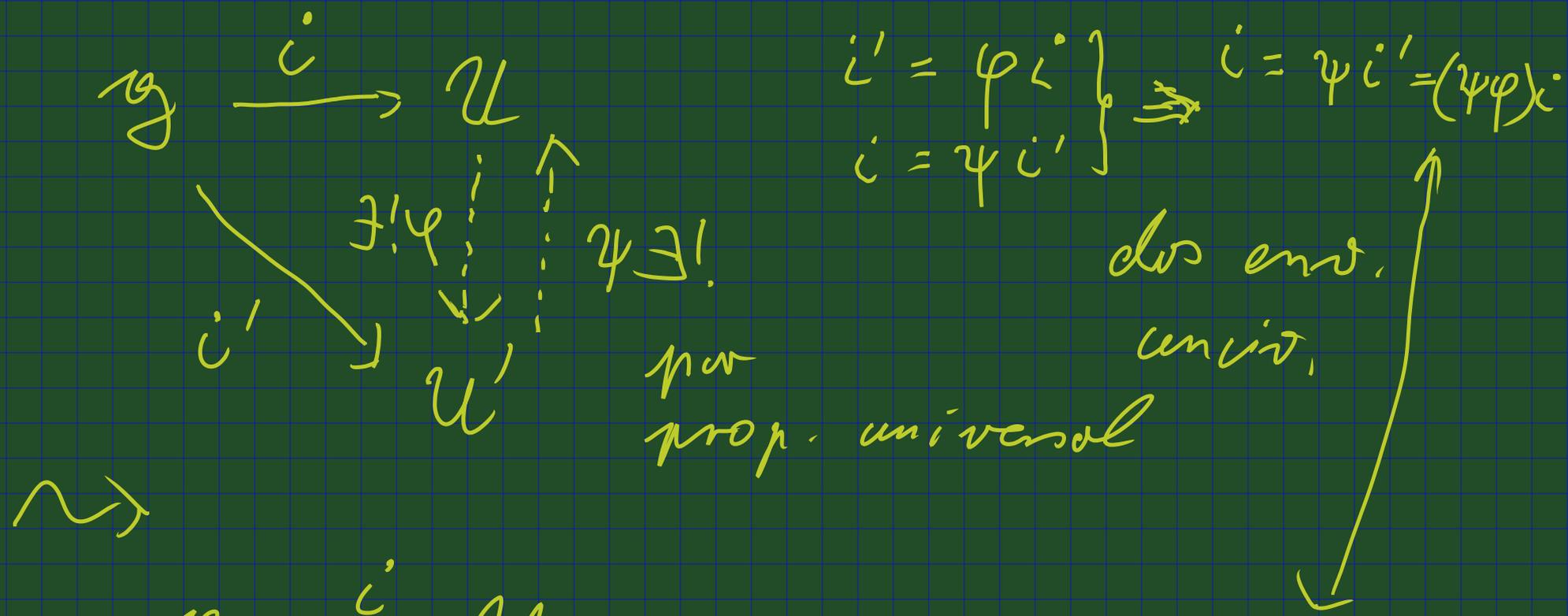
\mathcal{A} \exists $j: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ con prop. (*)

existe un único hom. de álgebra asociativa φ



$$(\mathcal{A} = \text{End}_{\mathbb{F}}(V)!)!$$

Es fácil demostrar que "la" envolvente universal es única salvo isomorfismo canónico (si existe)



pero por unicidad $\text{id}_u = \psi \psi^{-1}$.

• El siguiente paso es la existencia:

$$U(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}\mathfrak{g} / \left\langle \underbrace{x \otimes y - y \otimes x - [x, y]}_{=I} \right\rangle_{\forall x, y \in \mathfrak{g}}$$

\uparrow
alg. tensorial / \mathfrak{g}
como esp. vect.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{T}\mathfrak{g} & \text{alg. tensorial} \\ & \searrow \text{c. P} & \downarrow \pi & \\ & & U(\mathfrak{g}) & \end{array}$$

tiene la prop (*)

$$x, y \in \mathfrak{g}$$

$$i([x, y]) \stackrel{?}{=} i(x) i(y) - i(y) i(x)$$

Claro, porque

$$\underbrace{i(x) \otimes i(y) - i(y) \otimes i(x)}_{[x, y] \in \mathfrak{I}}$$

$$\pi(\quad) = i(x) i(y)$$

↙

Propiedad universal sigue de prop. universal de $\mathfrak{I}\mathfrak{g}$:

Sea $\mathfrak{g} \xrightarrow{j} \mathcal{A}$ con propiedad (*)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A} \\ \downarrow i & \searrow \exists! \varphi & \downarrow \tau \\ \mathfrak{I}\mathfrak{g} & & \mathcal{A} \end{array}$$

pero como \mathcal{J} tiene propiedad (*)

$$\Rightarrow \text{Ker}(\varphi) \subset \mathcal{I} \quad \checkmark$$