

Rec. $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie / F

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g} \xrightarrow{j} T\mathfrak{g}/\mathfrak{J} =: \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_j$

$$\mathfrak{J} = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid \forall x, y \in \mathfrak{g} \rangle$$

ideal gen por $\mathfrak{J}$

$$j: \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \quad \text{tiene la prop}$$

$$(*) : \quad j(x) \cdot j(y) - j(y) \cdot j(x) = j([x, y])$$

$\forall x, y \in \mathfrak{g}$

γ $U(\gamma)$ es universal c.r. a
esta propiedad

Obs. • en general, a partir de la
definición no podemos decir mucho
acerca de las propiedades de $U(\gamma)$
ni sabemos, ni γ es injectivo

• Si γ es abeliano, entonces

$$U(\gamma) \cong \mathcal{S} \gamma \longleftarrow \gamma$$

4.3 El teorema PBW y consecuencias

Poincaré - Birkhoff - Witt

Historia • 1880 A. Cayley lo demostró
para $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

olvidado hasta ~ 1970

• 1900 H. Poincaré olvidado (no entendido)
hasta ~ 1960 BOURBAKI

• 1937 Birkhoff - Witt publicaron
un trabajo

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie / F

Situación

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i \geq 0} T_i$$

$\text{Ker } \pi = \mathfrak{g}$
 $= \langle x \otimes 1 - 1 \otimes x | \dots \rangle$
 $= \langle x \otimes y - y \otimes x | \dots \rangle$
 $= \langle [x, y] | \dots \rangle$

$\text{un. } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathfrak{g}}$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Definición

$$T_m := \bigoplus_{i=0}^m T_i \subset \tilde{\mathfrak{g}} \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\mathcal{U}_m := \pi(T_m) \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{U}_{-1} := 0$$

Obs. • $\mathcal{U}_m \circ \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{m+n}$!

$\text{un. } \mathfrak{g}$

$\text{un. } \mathfrak{g}$

$$\therefore \bullet U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U$$

$$\bullet \bigcup_{i \geq 0} U_i = U$$

$\leadsto U$ es un álgebra filtrado

Podemos estudiar el espacio graduado asociado:

$$G^m := U_m / U_{m-1} \quad m=0, 1, 2, \dots$$

$$G := \bigoplus_{m=0}^{\infty} G^m$$

$$G^m \times G^n \longrightarrow G^{m+n}$$

$$(u + U_{m-1}) (v + U_{n-1}) \longrightarrow u \cdot v + U_{m+n-1}$$

está bien definida:

$$\underbrace{u \cdot v}_{\in U_{m+n}} + \underbrace{u \cdot u_{n-1} + u_{m-1}v + u_{m-1}u_{n-1}}_{\in U_{m+n-1}}$$

$\therefore U$ es un álgebra asociativo con γ
graduado

el álgebra graduado asociado a
la filtración $U_\bullet$ de U .

$$\begin{array}{ccc} \text{Obs. } T^m \subset T_m & \xrightarrow{\text{comp.}} & G^m \\ \pi(T^m) \subset \pi(T_m) = U_m & \xrightarrow{\quad} & U_m / U_{m-1} \end{array}$$

$$T^m \hookrightarrow T_m \xrightarrow{\pi} U_m \twoheadrightarrow G^m$$

φ_m

Afirmamos que $\varphi_m: T^m \rightarrow G^m$
es suprayectivo!

Claro ya que $T_m = T^m \oplus T_{m-1}$

$$\Rightarrow U_m = \pi(T^m) + U_{m-1}$$

genera a $G^m = U_m / U_{m-1}$

$$\leadsto \varphi: \underbrace{\bigoplus_{m \geq 0} T^m}_{\tilde{T}} \xrightarrow{\bigoplus \varphi_m} \underbrace{\bigoplus_{m \geq 0} G^m}_{\tilde{G}}$$

Lema $\varphi: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{G}$ es un
 homomorfismo suprayectivo de
 álgebras unitarias γ $\varphi(\underline{I}) = 0$
 $\uparrow$
 gen. por los
 conmutadores en $\tilde{\mathcal{F}}$

γ por lo tanto induce un
 homomorfismo suprayectivo

$$\overline{\varphi}: \mathcal{G} := \tilde{\mathcal{F}} / \underline{I} \rightarrow \mathcal{G}$$

($\Rightarrow \mathcal{G}$ es conmutativa)

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{F} \times \mathbb{F}, \quad a \mapsto (a, 0) \\ \text{no} & & \text{unitario} \end{array} \right]$$

Dem. Sean $x \in T^m$, $y \in T^n$

$$\varphi_{m+n}(x \otimes y) = \varphi_m(x) \cdot \varphi_n(y)$$

por las definiciones!

$$\varphi_0(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}^0 = \mathcal{U}_0 / \mathcal{U}_{-1} \cong \mathbb{F}$$

$\therefore \varphi$ es hom. unitario de álgebras.

Sea ahora $x \otimes y - y \otimes x$ un
generador (típico) de $\mathcal{I}$ ($x, y \in \mathcal{A}$)
(tenemos que demostrar
 $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$)

observando:

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y])$$

porque $J = \ker(\pi)$. $\in \mathcal{U}_1$

por outro lado

$$\underbrace{\pi(x \otimes y - y \otimes x)}_{\in T^2 \subset T_2} \in \mathcal{U}_2 = \pi(T_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in \underbrace{\mathcal{U}_1 / \mathcal{U}_1}_{0_{G^2}} \subset \underbrace{\mathcal{U}_2 / \mathcal{U}_1}_{G^2}$$

□

Teorema (PBW)

El homomorfismo $\overline{\varphi}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$
de álgebras graduadas es
un isomorfismo.

[en vista del Lema falta demostrar
 $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathcal{I}!$]

La demostración es bastante
complicada $\leadsto$ 1 clase completa

Corolario A Con la notación del

Lema sea

$W < T^m$ subespacio l.g.

$$W \oplus I^m = T_m$$

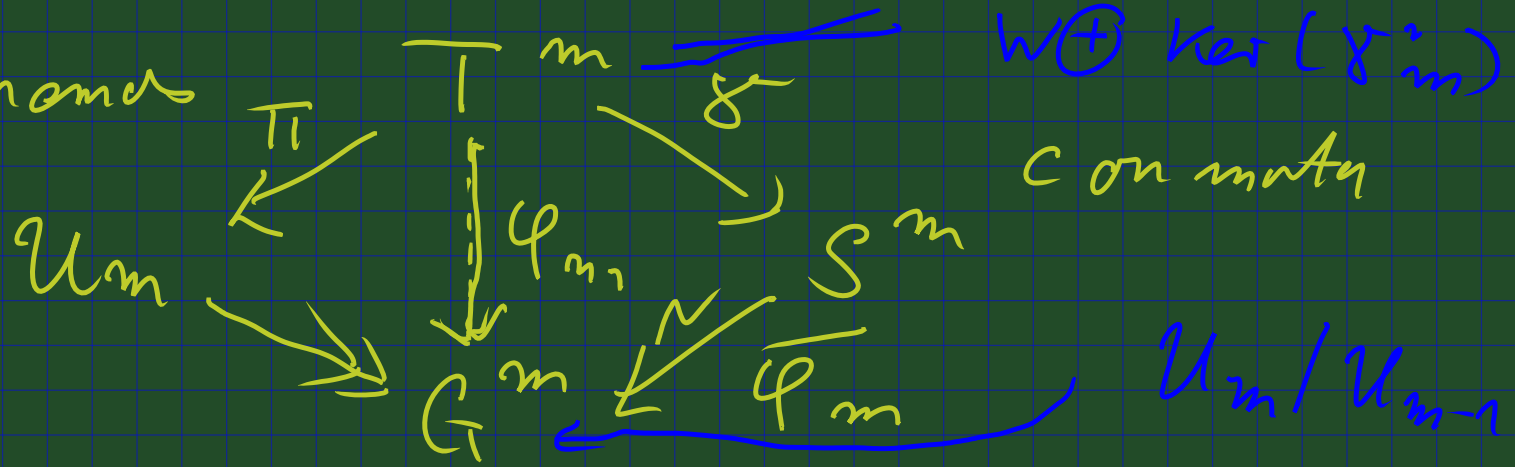
$$\text{donde } I^m := I \cap T^m$$

entonces

$$\pi(W) \oplus U_{m-1} = U_m$$

Dem.

Tenemos



$$\Rightarrow \gamma: W \xrightarrow{\sim} S^m \quad \square$$

Corolario B El mapeo canónico

$j: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es
inyectivo.

En particular (en vista de la prop. (*))
podemos identificar a $\mathfrak{g}$ con los
sabrals. de L de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$

$$(\text{con } [u, v] := u \cdot v - v \cdot u)$$

Dem. Eso es un caso particular
del Cor. A con $W = T^1 = \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}
 & | \quad \gamma: \tilde{J} \rightarrow \mathcal{G}, \quad T^1 \xrightarrow[\gamma_1]{\sim} S^1 \\
 & \quad \gamma \quad \underline{I} = \left(\bigoplus_{j \geq 2} \underline{I}^j \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

Cor C (bases PBW de $\mathcal{U}$)

Sea $(x_1, x_2, \dots)$ una base de $\mathfrak{g}$
(ordenada, contable)

Entonces los elementos

$$x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_m} = \pi(x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes \cdots \otimes x_{i_m})$$

con $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$,
junto con el $1_{\mathcal{U}}$ formar una base de $\mathcal{U}$

Dem. See

$$W^m :=$$

$$\text{span} \{ (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_m}) \mid i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \} \\ < T^m$$

γ observando

$$\gamma_m: W^m \xrightarrow{\sim} S^m \quad \text{isom.}$$

$$\begin{array}{ccc} (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_m}) & \xrightarrow{\quad} & \text{(base de monomios)} \\ \text{Cor } A & & \uparrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \pi(W^m) \oplus \mathcal{U}_{m-1} = \mathcal{U}_m$$

$\leadsto$ base PBW de $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ $\square$

Ejemplo $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ con base

$$(x, h, y) \quad \left[x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\uparrow$ BW

$$\Rightarrow (x^a \cdot h^b \cdot y^c \mid (a, b, c) \in \mathbb{N}_0^3)$$

es $\mathbb{C}$ -base de $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ ($x^0 h^0 y^0 := 1_{\mathcal{U}}$)