

Rec. el tma PBW $\rightarrow$ su apl.
a las bases PBW de $U(\mathfrak{g})$

Ej $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ con $\mathbb{C}$ -base:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{PBW}}{\Rightarrow} \{ x^a h^b y^c \mid (a, b, c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$$

es una $\mathbb{C}$ -base de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

$$x^0 h^0 y^0 = 1_u$$

ojo:

$$\{ y^a x^b h^c \mid (a, b, c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$$

es en un principio una base diferente

4.4 Álgebras de L_{ie} libres

Queremos definir álgebras de L_{ie} en términos de generadores y relaciones
(~) álgebras de L_{ie} n.o. / $\mathbb{F}$ asoc. a un sistema de raíces)

Def un álgebra de L_{ie} $\mathfrak{g}$ / $\mathbb{F}$

con un conjunto de generadores $X \subset \mathfrak{g}$
se llama libre sobre X si cumple

la siguiente propiedad universal:

Para todo alg. de L_{ie} $\mathfrak{g}$ / $\mathbb{F}$

$\gamma \quad \underline{\Phi}: X \rightarrow \mathfrak{g}$ mapeo de conjuntos
 existe un único $\hat{\underline{\Phi}}: X \rightarrow \mathfrak{g}$ t.q.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\exists! \hat{\underline{\Phi}}} & \mathfrak{g} \\
 \cup & & \nearrow \\
 X & \xrightarrow{\underline{\Phi}} & \mathfrak{g}
 \end{array}$$

(mapeo de conjuntos)

Es estándar verificar que
 un alg. libre sobre X es único
 salvo isom. canónico, si existe.

- Existencia Sea $V_X := \bigoplus_{x \in X} F \cdot x$
 esp. vect. con F -base X

$\gamma \quad \tilde{T}_F(V_X)$ alg. tensorial.

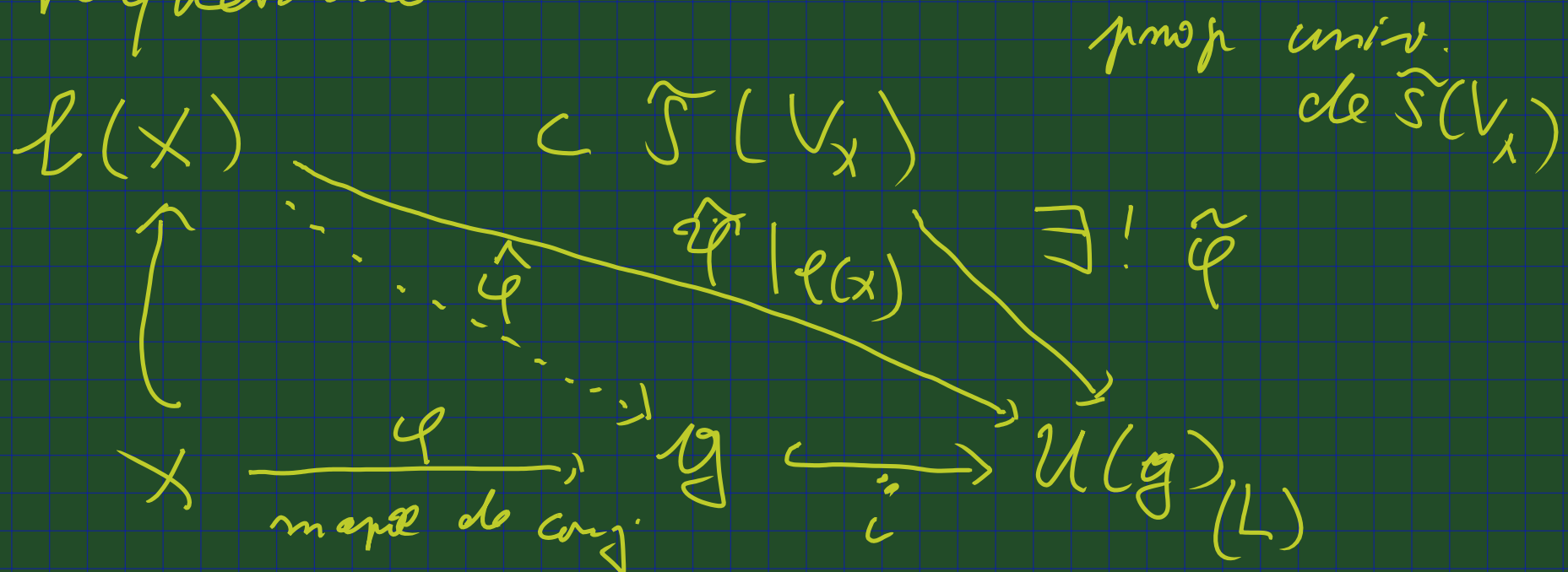
Consideramos $X \in V_X \in \tilde{T}(V_X)_L$

γ consideramos $\ell(X) \in \tilde{T}(V_X)_L$

el subalg. de Lie, generado por X .

$\ell(X)$ tiene la propiedad universal

requerida:



$$\tilde{\varphi}(l(x)) \subset \langle \varphi(x) \mid x \in X \rangle$$

$$\leq \mathcal{U}(g)_L$$

subalg. de L

por eso podemos definir $\hat{\varphi}$, usando

$$PBW: g \mapsto \mathcal{U}(g).$$

Obs. $\mathcal{U}(l(x)) \cong \mathcal{U}(V_x)$

por la propiedad universal de $\mathcal{U}$.

$$l(x) \longrightarrow \mathcal{U}(V_x)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A} \text{ asoc con } 1 \\ & \searrow & \uparrow \text{ " } \\ l(x) & & \tilde{f} \\ & \searrow & \uparrow \text{ " } \\ & & L \\ \text{hom. de alg. de } L & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \xrightarrow{f} L \end{array}$$

f det. por sus valores en X

$\tilde{\rho}$ existe por la propiedad universal del álgebra tensorial.

- Ya mencionamos que las rep. F -lineales de $\mathfrak{g}$ corresponden a los módulos de $U(\mathfrak{g})$ como

$\wedge$ álgebra asociativa por la prop. universal de $U(\mathfrak{g})$!

- Es muy fácil definir rep. de $L(X)$: simplemente hay que asignar un endom. $\rho(x) \in \text{End}(V)$
 $\forall x \in X$

$$\begin{array}{ccc}
 \ell(x) \dots \varphi & & \\
 \cup & \searrow & \\
 x & \xrightarrow{\varphi} & \text{End}(V)
 \end{array}$$

4.5. Relaciones cumplidas por un álgebra de Lie n.o

Regresamos al estudio de un álgebra de Lie n.o. $\mathfrak{g}/\mathcal{P}$

un subálgebra de Cartan $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}$ y

$$\Delta \subset \overline{\Phi} \subset \mathfrak{f}^*$$

base raíces

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell\}$$

Recordamos

$$\begin{aligned} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle &\equiv (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \\ &= \alpha_i(h_j) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $h_j \in \mathfrak{h}$ coraíz

Recordamos: [Lema 1 en 2.4]

Podemos fijar

$$x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}, \quad y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \in \mathfrak{g}.$$

$$[x_i, y_j] = h_i$$

$$(x_i, h_i, y_i)$$

$\hookrightarrow$ base est. de $\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$

Prop. Con la notación que acabamos de introducir, $\mathfrak{g}$ es generado por los $\{x_i, y_i, h_i \mid i=1, 2, \dots, \ell\}$.

Estos generadores cumplen las siguientes relaciones:

$$(S1) \quad [h_i, h_j] = 0 \quad \forall i, j$$

$$(S2) \quad [x_i, y_j] = \begin{cases} h_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$(S3) \quad [h_i, x_j] = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) x_j$$

$$[h_i, y_j] = -(\alpha_j, \alpha_i^\vee) y_j$$

$$(S_{i'j}^+) (\text{ad } x_i)^{-(\alpha_j, \alpha_{i'}^\vee)+1} (x_{j'}) = 0 \\ \forall i' \neq j'$$

$$(S_{ij}^-) \text{ad}(\gamma_i)^{-(\alpha_j, \alpha_i^\vee)+1} (\gamma_{j'}) = 0$$

Las relaciones se conocen como las relaciones de Serre.

Dem. (S1) $h_i \in \mathfrak{f}$ y $\mathfrak{f}$ es abeliano.

(S2) Tma 1 b) de 2.4 para $i=j$

$$[x_i, \gamma_{j'}] \in \mathfrak{g} \underbrace{\alpha_i - \alpha_{j'}}_{\text{no es raíz}} \quad (\text{Lema 1 de 2.4})$$

$$\Rightarrow \leadsto 0,$$

(S3) Recordamos $[R, x_j] = \alpha_j(R) x_j$
(def. de las raíces)

en part $h = h_i: \alpha_j(h_i) = (\alpha_j, \alpha_i^\vee)$

γ_j similar

$(S_{ij}^+): i \neq j \Rightarrow \alpha_j - \alpha_i$ no es raíz

$\Rightarrow$ la α_i -cuerda que pasa por α_j
es de la forma

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j + q \alpha_i$$

$$\text{con } -q = (\alpha_j, \alpha_i^\vee) \quad (\text{ver 3.4})$$

Como $\text{ad}(x_i)$ manda sucesivamente
los espacios de raíz para α_i .

al de $\alpha_j + \alpha_i \rightarrow \alpha_j + 2\alpha_i, \dots \rightarrow$

$$\alpha_j + q\alpha_i \rightarrow 0$$

(Lema 1 y Lema 1 de 2.4!)

sigue la afirmación

(S_{i_j}) lo mismo.

$\therefore$ las relaciones se cumplen,

$\mathfrak{g}$ es generado por los

$$\{x_i, h_i, y_i \mid i=1, \dots, \ell\}.$$

- Los e_i forman una $\mathbb{Q}$ -base de $\mathfrak{g}$
- Los x_i, y_j son suficientes para generar los espacios de raíz.:

Por el Cor del Lema A en 3.6
para cada raíz $\beta \in \Phi^+$ tenemos

$$\beta = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_k} + \dots + \alpha_{i_{\ell(\beta)}}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\in \Phi^+ \quad \forall x}$

Combinando ahora con Lema 1 de 2.4,

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \quad \text{si } \alpha+\beta \in \Phi$$

γ usando que $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad \forall \alpha \quad \square$

Obs.: Formalmente, las h_i no son necesarios como generadores ya que $h_i = [x_i, y_i]$, pero resulta conveniente tenerlos para simplificar la notación.

- Las relaciones solamente involucran información que se puede extraer del sistema de raíces $\bar{\Phi}$ (de hecho de la matriz de Cartan)

- El resultado de J.P. Serre es, que estas relaciones definen en efecto un álgebra de Lie n. n. / ϕ un sistema de raíces $\overline{\Phi}$.

4.6. Consecuencias de (S1) - (S3)

Fijamos un sistema de raíces

$\overline{\Phi} \subset E$ un base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e\}$

y números de Cartan

$$C_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j^\vee) = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \in \mathbb{Z}$$

$$(C_{ii} = 2, \quad C_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\} \quad \forall i \neq j)$$

y consideramos el álgebra de Lie
ligue $\hat{\mathfrak{g}}$ con 3 l generadores
 $\{ \hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i \mid i=1, \dots, l \}$

Consideramos en $\hat{\mathfrak{g}}$ el ideal $\hat{\mathfrak{k}}$
que es generado por los siguientes
elementos:

$$[\hat{h}_i, \hat{h}_j], [\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i,$$

$$[\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji} \hat{x}_i,$$

$$[\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji} \hat{y}_j$$

Sea $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} / \mathcal{K}$,

$$\tilde{x}_i := x_i + \mathcal{K}$$

$$\tilde{y}_i := y_i + \mathcal{K}$$

$$\tilde{h}_i := h_i + \mathcal{K}$$

$\therefore$ En $\tilde{\mathcal{U}}$ es generado por los
 $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{h}_i) \quad i=1, \dots, l$
 estos elementos cumplen las rel.
 (S1) - (S3).