Lema (Ej 24 G)

Sea $\Phi \subset E$ un sist. raíces con base Δ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_e\}$,

$\rightsquigarrow \Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$.

Si $\lambda \in \Gamma = \bigoplus_{i=1}^{e} \mathbb{Z}\alpha_i$ cumple

$$w\lambda \in \sum_{i=1}^{e} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \cup \sum_{i=1}^{e} -\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$$

$\forall w \in W = W(\Phi)$

entonces $\lambda \in \bigcup_{\beta \in \Phi} \mathbb{Z}\beta$

Resumen

Sec 2 (inicios de 3)

- Si $\mathfrak{g}$ es un álg. de Lie s.s / $\mathbb{C}$

para cada subálg de Cartan $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$

(máx abel. y consis. de el. s.s)

$\rightsquigarrow \Phi := R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^*$ sist. de raíces

$$\mathfrak{g} = \underset{\substack{\| \\ \mathfrak{h}}}{\mathfrak{g}_0} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \underbrace{\mathfrak{g}_\alpha}$$

$$:= \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \ \forall \alpha \in \Phi$

$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \mathfrak{h}^*$, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$

$\rightsquigarrow$ Estudiar sistemas de raíces abstractos en un espacio euclídeo E

- Si $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ son dos subálg. de Cartan $\exists\ \varphi \in \mathrm{Aut}^{\mathrm{Lie}}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ t. q. $\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$

$\rightsquigarrow$ $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\sim} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ (def!)

$\therefore$ $\{\text{álg. Lie s.s} / \mathbb{C}\} / \cong$

$\longrightarrow$ $\{\text{sist de raíces abstractos}\} / \cong$

$$g \longmapsto R(g,f)$$

está bien definido.

3. Sistemas de raíces abstractos $\Phi \subset E$

- tiene base Δ, $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ grupo de Weyl $\subseteq O(E)$

- $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$

bases $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ cámaras de Weyl $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ el W

- definimos sistemas irred. de raíces: $\Phi = \Phi_1 \cancel{\perp} \Phi_2$

• Classificación de los sist. de raíces irred en términos de la base Δ $\longleftrightarrow$ $\underbrace{(\alpha, \beta^\vee)}_{\in \mathbb{Z}}$ $\alpha, \beta \in \Delta$

matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & & \leq 0 \\ & \ddots & \\ \leq 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $A_n (n \geq 1)$, $B_n (n \geq 2)$, $C_n (n \geq 3)$

$D_n (n \geq 4)$, $E_{6,7,8}$, F_4, G_2

4.5 Las rel. que cumple un álg. de Lie s.s

Rep. Si $\mathfrak{g}$ s.s. / $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ subálg. de Cartan $\Phi = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sist. de raíces con base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$

$\leadsto \exists$ $\mathbb{C} x_i = \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $\mathbb{C} y_i = \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$

$h_1, \ldots, h_\ell \in \mathfrak{h}$: $\alpha_i(h_j) = (\alpha_i, \alpha_j^\vee)$ $\forall\, i, j = 1, \ldots, \ell$

- Los $\{x_i, h_i, y_i \mid i = 1, \ldots, \ell\}$ generan $\mathfrak{g}$
- cumplen las relaciones de Serre (S1) − (S3) y $(S_{ij}^{\pm})$

4,6 Tma Serre (Chevalley, Harish-Chandra)

(1) – (4)

Consecuencias de (S1) – (S3)

Sea $\Phi \subset E$ sist. de raíces con base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$,

$\hat{\mathfrak{g}} / \mathbb{C}$ álg. libre con generadores

$\hat{x}_i, \hat{h}_i, \hat{y}_i \quad i = 1, \dots, \ell$

$$\mathfrak{g}_{\Phi,\Delta} := \hat{\mathfrak{g}} / (S)$$

S ideal generado por las rel. de Serre corresp. a Φ

(involucran nada más el rango y matriz de Cartan de Φ)

$\mathfrak{g}_\Phi$, Δ es un álg. de Lie s.s.

con subálg. de Cartan

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{C} h_i$$

$$(h_i := \hat{h}_i + (S),\ x_i := \hat{x}_i + (S)$$

$$y_i = \hat{y}_i + (S)$$

cumplen rel de Serre

y $R(\mathfrak{g}_{\Phi,\Delta}, \mathfrak{h}) \cong \Phi$.

Corolario [-el mapeo

Ψ : {Alg. Lie s-s $/\mathbb{C}$} $/\cong$

$\longrightarrow$ {sist. de raíces}$/\cong$

$\mathfrak{g} \longmapsto R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

es suprayectivo. (Tma Serre)

- Ψ es inyectivo:

Si $\Phi = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ entonces por 4.5: $\mathfrak{g}_{\Phi,\Delta} \longrightarrow \mathfrak{g}$ suprayectivo ese morfismo es un isom. porque

Φ, Δ es s.s. y con el mismo

sist. de raíces.

- Es fácil, refinar esta biyección a una correspondencia entre álg. de Lie simples y diag. de Dynkin (sist. de raíces irred.)

5. Teoría de rep. de álgebras de Lie semisimples

$\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ s.s.

Ya sabemos del Tma de Weyl que todas las rep. de dim-finita de $\mathfrak{g}$ son suma directa ("única") de simples.

$\rightsquigarrow$ queremos clasificar las rep. simples de dim. finita y conocer sus "caracteres" como lo tenemos ya para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Más precisamente:

Sea $\Phi = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sist. de raíces de $\mathfrak{g}$ con base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Phi\}$$
$$= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta\}$$
$$\supset \Phi$$

↑ axioma de raíces.

"pesos integrales"

$$\cup$$

$$\Lambda^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall \alpha \in \Delta\}$$
$$\cap$$
$$\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$$

pesos dominantes integrales

rel. de orden parcial $\leq$ sobre Λ:

$$\lambda \leq \mu \iff \mu - \lambda \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\, \alpha$$

Nuestra meta es el siguiente (:

<u>Tma</u>. Sea X una rep. simple de dim. finita de $\mathfrak{g}$ $\Longrightarrow$

$$X = \bigoplus_{\lambda \in \Pi(X) \subset \Lambda} X_\lambda$$ con

$$X_\lambda := \{ x \in X \mid h \cdot x = \lambda(h) \cdot x \ \forall h \in \mathfrak{h} \}$$

$\uparrow$

espacios de peso

$\lambda \in \Pi(X) \iff X_\lambda \neq 0$

$\Pi(X) \subset \Lambda$ es finito

$\Rightarrow$ tiene un único elemento máximo $\lambda \in \Lambda^+ \cap \Pi(X)$

- $\forall \lambda \in \Lambda^+$ $\exists!$ rep. simple $L(\lambda)$ con peso máximo λ.

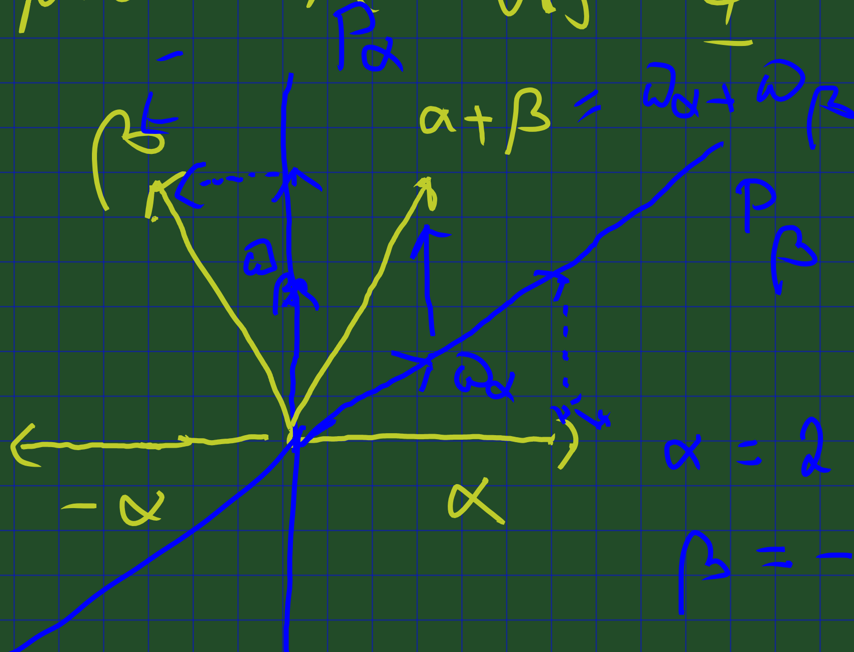
Obs. La formula de "caracteres" de Weyl da una expresión "cerrada" en términos de λ y ϖ (grupo Weyl)

para

$$\chi(L(\lambda)) = \sum_{\mu \in \Lambda} \dim(L(\lambda)_\mu) \cdot e_\mu$$

$$\in \mathbb{Z}[\Lambda]$$

Ejemplo Λ vs Φ para A_2



$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2\varpi_\alpha - \varpi_\beta$$

$$\beta = -\varpi_\alpha + 2\varpi_\beta$$