5.2. Primera parte de la clasificación de las rep. simples de dim. finita

Recordemos la notación

$$\Lambda := \{\lambda \in E \mid \underbrace{(\lambda, \alpha^\vee)}_{\text{"} \langle \lambda, \alpha \rangle \text{"}} \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Phi\}$$

$$\cup$$

$$\Phi \subset E \ (\subset \mathfrak{h}^*)$$

$$\cup$$

$$\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \text{ base} \rightsquigarrow \Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$$

Λ se llama la retícula de pesos integrales

$$= \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\, \varpi_i \quad \text{donde}$$

$$\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$

pesos fundamentales

$$W = W(\Phi) = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$$
$$= \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \}$$

grupo de Weyl (de Φ)

Fácil de ver:

$\forall\, w \in W,\ \lambda \in \Lambda \ :\ w(\lambda) \in \Lambda$

porque $r_\alpha(\lambda) = \underbrace{\lambda}_{\in \Lambda} - \underbrace{\langle \lambda, \alpha \rangle}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\alpha}_{\in \Lambda}$

$\therefore\ W \curvearrowright \Lambda$

$\lambda \underset{\Uparrow}{<} \mu \iff \mu - \lambda \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\, \alpha$

depende de la selección de Δ.

$$\Lambda^+ := \{ \lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta \}$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i \subseteq \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$$

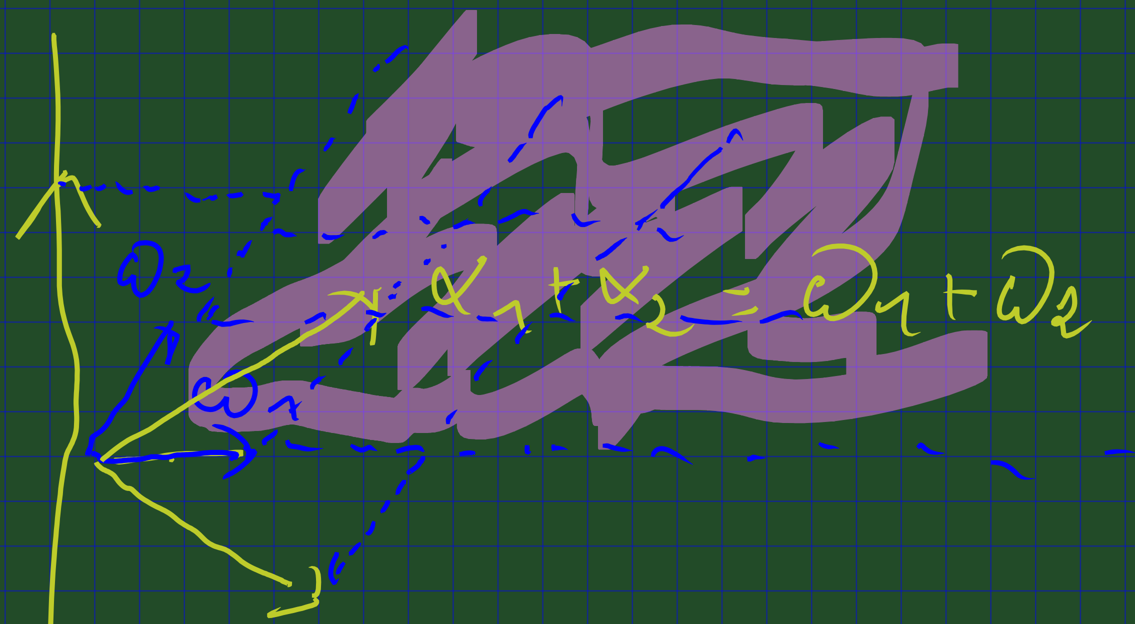
pesos integrales dominantes

de hecho

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}_{\geq 0} \varpi_i = \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$$

Ejemplo (A_2)

$$-\alpha_1 + 2\omega_2 = \alpha_2$$



$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \alpha_2$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álg. de Lie s.s. $/\mathbb{C}$

$\cup$

$\mathfrak{h}$ Cartan

$$\underline{\widetilde{\Phi}} = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset E \subset \mathfrak{h}^*$$

$$(\mathfrak{h}^* \cong E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

V una repn. de dim. finita de $\mathfrak{g}$

$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h) v \ \forall h \in \mathfrak{h} \}$$

espacio de peso λ de V

Lema A $\mathfrak{g}_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$

$\forall \alpha \in \Phi, \lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$\underset{\mathfrak{h}}{h} \cdot (\underset{\mathfrak{g}_\alpha}{x} \cdot \underset{V_\lambda}{v}) = \underbrace{[h, x]}_{\alpha(h)\cdot x} \cdot v + x \cdot \underbrace{(h \cdot v)}_{\lambda(h)\cdot v}$$

$$= (\alpha + \lambda)(h)\,(x \cdot v)$$

$\square$

Lema B. Sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{r}$ una suma de álgebras de Lie ($\mathfrak{b}, \mathfrak{r} < \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b} + \mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ como esp. vect.)

; Sea V una repn de $\mathfrak{a}$, y $U \subset V$ un subespacio $\mathfrak{b}$-estable (U una subrep. de V visto como repn. de $\mathfrak{b}$)

Entonces, la $\mathfrak{r}$-subrep de V

que es generada por U ya es una $\mathfrak{g}$-subrepr. de V.

La dem. es algo engorrosa y la posponemos para el uso de $U(\mathfrak{g})$.

<u>Prp. 1</u> Sea $\Delta \subset \Phi = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ una base de Φ y $<$ el orden parcial correspondiente sobre $\mathfrak{h}^*$

a) Sea $\Pi(V) \subset \mathfrak{h}^*$ el conjunto

de pesos de una repn. simple
de dim. finita de $\mathfrak{g}$

Si $\Pi(V)$ tiene un peso
máximo λ entonces
$\lambda \geq \mu \quad \forall \mu \in \Pi(V)$
es decir λ es el peso más alto
de V.

2) Cada repn. simple de dim.
finita tiene un peso más alto,

<u>Dem.</u> a) $\Rightarrow$ b) ✓ ($\Pi(V)$ finito)
$\neq \emptyset$

Para a) consideramos

$$\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha \in \bar{\Phi}^-} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \bar{\Phi}^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

$\mathfrak{n}_-$ es un subalg. nilpotente de $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{b}$ es un subálg. soluble (!)

("de Borel")

$\Rightarrow \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$

Si $\lambda \in \Pi(V)$ es máximo entonces

V_λ es estable bajo $\mathfrak{b}$ (Lema A)

y λ máximo

Lema B $\Longrightarrow$ $\underbrace{\mathfrak{n}_- \cdot V_\lambda}_{\equiv\ \mathfrak{n}_-\text{-subrep. generado por } V_\lambda}$ es $\mathfrak{g}$-estable

V simple $\Longrightarrow$ $\mathfrak{n}_- V_\lambda = V$

Lema A

$\Longrightarrow$) a) M_- consiste de espacios raíz negativos

Lema C Si V es una repr. de dim. finita de $\mathfrak{g}$, entonces todos los pesos de V son integrales, y el conjunto de pesos de V es estable bajo W

En fórmulas

$$\Pi(V) \subset \Lambda \quad , \quad W \cdot \Pi(V) = \Pi(V)$$

Dem. Consideramos para cualquier $\alpha \in \Phi$ el subálg

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C} x_\alpha}}{\mathfrak{g}_\alpha} \oplus \underbrace{\mathbb{C} h_\alpha}_{\substack{\cup\!| \\ \mathfrak{h}}} \oplus \underset{\substack{\| \\ \mathbb{C} y_\alpha}}{\mathfrak{g}_{-\alpha}} \xrightarrow[\sim]{\varphi} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

$h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ tal que

$$\varphi(h_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De la teoría de representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sabemos que los valores propios de $h = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ sobre cada rep. V de dim. finita son enteros.

Ahora si $\lambda \in \Pi(V)$ entonces

$$(\lambda, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$$

(sea $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ entonces

$$h_\alpha \cdot v = \lambda(h_\alpha)\, v = \underbrace{(\lambda, \alpha^\vee)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot v$$

h_α actúa como h sobre V)

lo mismo $\forall \alpha \in \Phi \rightsquigarrow \lambda \in \Lambda$.

Sea ahora $\lambda \in \Pi(V) \subset \Lambda$

y $\alpha \in \Phi$ entonces $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$

Si $m := \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ entonces nuevamente la teoría de repr. de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}^\alpha$ nos dice que

$$y \quad \underbrace{y_\alpha^m \cdot v}_{\in V_{\lambda - m\alpha}} \neq 0 \quad , \quad v \in V_\lambda \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi(V) \ni \lambda - m\alpha = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$$
$$= s_\alpha(\lambda)$$

Si $m = \langle \lambda, \alpha \rangle < 0$ similarmente

$$x_\alpha^{-m} v \neq 0$$
$$\in V_{\lambda + m\alpha} = V_{s_\alpha(\lambda)} \;!$$

Ya concluimos porque

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$$

Observaciones (1) Como $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$

consiste de elementos (absolutamente)

semisimples, para cada rep.

V de $\mathfrak{g}$ de dim. finita

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Pi(V)} V_\lambda). \quad \text{en part}$$

$\emptyset \neq \Pi(V)$ es finito.

en part existen elementos máximos

("overkill")

(2) Si $\lambda \in \Pi(V)$ no es domin[a]nte

entonces existe por definición

$\alpha \in \bar{\Phi}$ $\quad (\alpha \in \Delta)$ con

$\langle \lambda, \alpha \rangle < 0$

$\underset{\text{Prop.}}{\Longrightarrow}$ $r_\alpha(\lambda) = \lambda - \underbrace{\langle \lambda, \alpha \rangle}_{\geq 0} \alpha \in \Pi(V)$

y $r_\alpha(\lambda) > \lambda$

Eso significa, que los pesos máximos son dominantes.

i) El peso más alto de una representación simple de dim. finita es integral y dominante i.e. $\in \Lambda^+$

Lema D Si dos representaciones simples de nuestra alg. s.s. g tienen el mismo peso más alto entonces son isomorfas.

<u>Dem.</u> Sean V y V' simples de peso más alto $\lambda \in \Lambda^+$ y $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$, $v' \in V'_\lambda \setminus \{0\}$.

Consideramos la suma directa $V \oplus V'$ con la subrep. W que es generada por $(v, v') \in V_\lambda \oplus V'_\lambda$.

Claramente $\mathfrak{b} \cdot \mathbb{C} \cdot (v, v') \subset \mathbb{C}(v, v')$

Lema B

$\Rightarrow$ W es generado como $\mathfrak{g}$-rep. por $\mathbb{C}(v, v')$.

en part. W es suma directa de sus espacios de peso

y $W_\lambda = \mathbb{C}(v, v')$ el espacio de peso más alto de W,

$\Rightarrow$ Cada subrep. $W' \subsetneq W$ es suma de sus espacios de peso

y en particular $\lambda \notin \Pi(W')$

$\Rightarrow$ $\forall$ $W' \subsetneq W$ subrep.

$pr_\lambda(W') \subsetneq V$ (¡ falta V_λ !)

$pr_2(W') \lneq V'$

$$\begin{tikzcd} & V \oplus V' \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\ V & & V' \end{tikzcd}$$

pero V y V' son simples

$\Longrightarrow \quad pr_i(W') = 0 \quad i = 1, 2.$

$\Longrightarrow \quad W' = 0 \implies W$ simple

$\Longrightarrow \quad pr_1 : W \xrightarrow{\simeq} V$

$\quad\quad\; pr_2 : W \xrightarrow{\simeq} V'$ son isom.

Ya que $pr_1(v, v') = v \neq 0$

$pr_2(v, v') = v' \neq 0$

$\Rightarrow V \cong V'$ $\square$