Ejemplo : $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ (A_n)

recordamos que $\mathbb{C}^{n+1}$ es la rep. natural de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$

A partir de esta repr. construimos

$\Lambda^i \mathbb{C}^{n+1}$ la i-esima potencia exterior de la repr. nat.:

$$x \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_i)$$

$$:= \sum_{j=1}^{i} v_1 \wedge \dots \wedge x v_j \wedge \dots \wedge v_i$$

Se observa que

$$\omega_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i$$

$$\left(\varepsilon_i (h_1, h_2, \dots, h_{n+1}) = h_i \right)$$

vec. $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in \mathfrak{h}^*$

$$h_i = \mathrm{diag}(0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, -1, \dots, 0)$$

$$\Lambda^i \mathbb{C}^{n+1} \cong L(\omega_i)$$

con el vector de peso más alto

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_i$$

y se puede demostrar que

para $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \varpi_i \in \Lambda^+$

$L(\lambda)$ es un sumando directo

$$\bigotimes_{i=1}^{n} S^{a_i}(\Lambda^i \mathbb{C}^{n+1})$$

5.3 Construcción de representaciones de peso máximo

Rec: k campo y $\mathfrak{g}$ álg. de Lie

PBW: $\mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$

Tenemos una equivalencia (isomorfismo)

entre $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\mathfrak{g})-\mathrm{Mod}$

$$\rho \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk\text{-alg}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_{\Bbbk}(V))$$

$$\rho_L|_{\mathfrak{g}} \longleftarrow \rho_L : \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L \to \mathfrak{gl}(V)$$

(el "mismo" $\mathfrak{g}$)

(rec. $\mathfrak{g} \leq \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$ por PBW))

La otra dirección se da por la propiedad universal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)_L \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}_L"'] & \end{tikzcd}$$

Regresamos ahora a

$\mathfrak{g} / \mathbb{C}$ s.s. subálg. de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$

$$\mathfrak{h}^* \supset \underset{\text{sist. raíces}}{R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \Phi} \supset \underset{\text{base}}{\Delta}$$

$$\rightsquigarrow \quad \Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$$

<u>Definición</u> Para $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ consideramos el ideal a izquierda

$$I_\lambda = I(\lambda, \Phi^+) < U(\mathfrak{g})$$

que es generado por todos

- $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Phi^+$

$$\bullet\ h - \lambda(h)\cdot 1_{\mathcal{U}} \quad \forall\, h \in \mathfrak{g}^*$$

$$\underset{\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})}{\uparrow}$$

y denotamos con

$$V(\lambda) \equiv V(\lambda, \Phi^+) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \mathcal{I}_\lambda$$

el <u>módulo de Verma</u> <u>de peso más alto λ</u> y

$v_\lambda + \mathcal{I}_\lambda \in V(\lambda)$ se llama el generador canónico del módulo de Verma $V(\lambda) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Mod

Prop. 1 (Estructura básica de los módulos de Verma)

Con nuestra notación vale lo siguiente:

a) Sea $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} = \Phi^+$ sin repeticiones ($|\Phi^+| = r$) y $y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \setminus \{0\}$ $i = 1, \dots, r$ generadores de los espacios de raíz negativos entonces los vectores

$$\underbrace{y_1^{m_1} \cdot y_2^{m_2} \cdots y_r^{m_r}}_{\in U(\mathfrak{g})} \cdot v_\lambda \in V(\lambda) \quad \text{con} \quad (m_1, m_2, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$$

forman una $\mathbb{C}$-base de $V(\lambda)$.

b) El módulo de Verma $V(\lambda)$ tiene una descomposición en espacios de peso (c.r. a $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^*$)

$$V(\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} V(\lambda)_\mu \quad \rightarrow$$

su espacio de peso más alto

$$V(\lambda)_\lambda = \mathbb{C} \cdot v_\lambda \qquad (\dim 1!)$$

c) Más generalmente

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu)$$

donde $\wp : \Gamma^+ \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\Gamma^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha \subset \mathfrak{g}^*$$

$(\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \Gamma^+ !)$

es la función de particiones de Kostant

$$\wp(\mu) = \left| \{ (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + \dots + n_r\beta_r = \mu \} \right|$$

<u>Observaciones</u> · En algunos textos

(Soergel ...) el módulo de Verma se denota con $\Delta(\lambda)$

- La proposición dice que con
$$\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{n}_\alpha \subset \mathfrak{g}$$
el módulo de Verma $V(\lambda)$ es libre como $U(\mathfrak{n}_-)$-módulo

<u>Dem.</u> Sea $\ell = |\Delta|$ - el rango de $\mathfrak{g}$

Consideramos el anillo de polinomios
$\mathbb{C}[h_1, h_2, \dots, h_\ell]$ (ℓ generadores)

Para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ es fácil ver que los polinomios de la forma

$$(h_1-\lambda_1)^{r_1}(h_2-\lambda_2)^{r_2}\cdots(h_\ell-\lambda_\ell)^{r_\ell}$$

con $(r_1, r_2, \dots, r_\ell) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\ell}$ forman una $\mathbb{C}$-base de nuestro anillo de polinomios.

Si ahora escogemos generadores $x_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \setminus \{0\}$ $\forall\, i=1,2,\dots,r$ entonces concluimos por el Tma PBW que los productos

$$M(\underline{m}, \underline{r}, \underline{n}) := \underbrace{\underbrace{y_1^{m_1}\, y_2^{m_2} \cdots y_r^{m_r}}_{}}_{\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)} \cdot \underbrace{(h_1-\lambda_1)^{r_1} \cdots (h_r-\lambda_3)^{r_e}}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \cdot \underbrace{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}}_{}$$

forman una $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

si identificamos los h_i con una $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{h}$.

(e.g. $h_i = [x_i, y_i]$)

rec. $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in \underline{\Phi}^+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}_+}$

$\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha \in \underline{\Phi}^-} \mathfrak{g}_\alpha$ $\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}$

Ahora, tenemos un hom de álgebra de Lie

$$\mathfrak{b} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$$

con $p(\mathfrak{n}_+) = 0$

$p|_{\mathfrak{g}} = id_{\mathfrak{g}}$

que induce un hom. de álgebras asociativas

$U(\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbb{C}$ por la propiedad universal.

cuyo nucleo $\tilde{I}$ es la envolvente lineal de todos los elementos no triviales de la forma

$M(0, \tau_-, n)$

si tomamos $\lambda_i := \lambda(h_i)$

De $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \underline{\mathfrak{b}}$ sigue

$U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{b})$ como espacio vect.

con eso vemos que los elementos

$M(\underline{m}, \underline{\dot{r}}, \underline{\dot{n}})$ con $\underline{r} = 0$ ó $\underline{n} = 0$

forman una base de $\bar{I}_\lambda$

porque $\tilde{I}_\lambda \subset U(\mathfrak{b})$ es parte de $\underline{I}_\lambda$.

$\Rightarrow y_1^{m_1} \cdots y_r^{m_r} \cdot v_\lambda$ forman

una base de $V(\lambda)$ por constr.

b) + c) siguen de la observación

$$\underset{\mathfrak{h}}{\overset{\uparrow}{h}} \cdot \left(y_1^{m_1} \cdots y_r^{m_r} \cdot v_\lambda \right) = \lambda(h) + \left(\lambda, \sum_{j=1}^{r} m_j \alpha_j^\vee\right) \cdot y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_r^{m_r} \cdot v_\lambda \; !$$

<u>Lema A</u> (Propiedad universal de los módulos de Verma)

Con nuestra notación para cada representación M de $\mathfrak{g}$ y $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), M) \longrightarrow \{ v \in M_\lambda \mid \mathfrak{n}_+ \cdot v = 0 \}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi(v_\lambda)$$

<u>Dem.</u> Para cada $\mathbb{C}$-álgebra R (asoc.) y un R-modulo M tenemos un isom.

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\sim} M$$

$$\varphi \longmapsto \varphi(1)$$

y si $I < R$ es un ideal a izquierda de R, entonces por la propiedad universal del cociente este isomorfismo se restringe a:

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \xrightarrow{\sim} \{ m \in M \mid I \cdot m = 0 \}$$

aplicamos esto con

$R = U(\mathfrak{g})$, $\quad I = I_\lambda$ $\square$