$\Longrightarrow ch(M \otimes N) = ch(M) \cdot ch(N)$!

Lema $ch(V(\lambda)) \stackrel{\Uparrow}{=} e^{\lambda} \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots)$

$\stackrel{\Uparrow}{\Longrightarrow} \prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) \, ch(V(\lambda)) = e^{\lambda}$

Dem. $(1 + e^{\alpha} + e^{2\alpha} + \dots)(1 - e^{-\alpha}) = 1 \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$

$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 + e^{\alpha} + e^{2\alpha} + \dots) = \sum_{\lambda \in \Gamma^+} \mathcal{P}(\lambda) e^{\lambda}$

$\square$

~~5.4.2~~
Obs. $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ es un dominio integral i.e. no tiene divisores de cero.

5.4.3 Operador / elemento de Casimir

Sea $\varkappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \to Tr(ad(x) ad(y))$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

Recordamos que $\varkappa|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ es no deg

$\Rightarrow \varkappa$ induce isom

$\bar{\varkappa} : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$, $h \longmapsto \varkappa(h, -)$

en otras palabras

$\langle \bar{\varkappa}(h), h' \rangle = \varkappa(h, h')$

aquí: $\langle \varphi, h \rangle := \varphi(h)$

• Sea $(-,-) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbb{C}$ bil. sim.

t.q. $(\lambda,\mu) := \mu(\mathcal{K}^{-1}(\lambda)) = \langle \mu, \mathcal{K}^{-1}(\lambda)\rangle$

Vimos al final del Cap 2 (alg. Lie ss)

que $(-,-)|_{\mathbb{R}\Phi} = E$ pos. def.

y como $W \leq O(E)$)

W también actúa ~~en $\mathfrak{h}$~~ canónicamente

en $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{h}^*)^*$

$\langle \lambda, w\cdot x\rangle = \langle w^{-1}\lambda, x\rangle$

$$\Rightarrow \mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}(wx, w\cdot y)$$

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum_{\alpha\in\Phi} \langle \alpha, x\rangle\langle\alpha,y\rangle$$

$$\mathcal{K}(wx, wy) = \sum_{\alpha\in\Phi}\langle\alpha, wx\rangle\langle\alpha, wy\rangle$$
$$= \sum_{\alpha\in\Phi}\langle w^{-1}\alpha, x\rangle\langle w^{-1}\alpha, y\rangle$$

$\square$

Lema A El operador de Casimir

$C = C_{\mathcal{K}}$ actúa sobre $V(\lambda)$ por el

escalar $c_\lambda := (\lambda+\rho, \lambda+\rho) - (\rho,\rho)$

Dem. Rec. $x_1, \dots, x_d$ base de $\mathfrak{g}$

$x_1', \dots, x_d'$ t.q. $\mathcal{K}(x_i, x_j') = \delta_{ij}$

$$C_{\mathcal{K}} \cdot v = \sum_{j=1}^{d} x_j(x_j' \cdot v)$$

$\rightsquigarrow C = \sum x_j x_j' \in Z(U(\mathfrak{g}))$ centro

Escogemos una base conveniente:

$x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ t.q.

$\kappa(x_\alpha, y_\alpha) = 1$ rec. $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$

y $h_1, \dots, h_\ell$ base ortonormal de $\mathfrak{h}$

$\kappa(h_i, h_j) = \delta_{ij}$

$$\rightsquigarrow C = \sum_{\alpha \in \Phi^+} y_\alpha x_\alpha + x_\alpha y_\alpha + \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2$$

$$= \Big(\sum_{\alpha \in \Phi^+} 2 y_\alpha x_\alpha + \underbrace{[x_\alpha, y_\alpha]}_{\in \mathfrak{h}}\Big) + \sum_{i=1}^{\ell} h_i^2$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\in \\ V(\lambda)}}{C \cdot v_\lambda} = \underbrace{\Big(\sum_{\alpha \in \Phi^+} \lambda([x_\alpha, y_\alpha]) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda(h_i)^2\Big)}_{c_\lambda} v_\lambda$$

con $h := \overline{\kappa}^{-1}(\lambda)$ obtenemos

$$c_\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \underbrace{\kappa(h, [x_\alpha, y_\alpha])}_{\substack{\text{inv} \\ \kappa([h, x_\alpha], y_\alpha)}} + \sum_{i=1}^{\ell} \kappa(h, h_i)^2$$

$$= \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(h) \underbrace{\kappa(x_\alpha, y_\alpha)}_{1} + \sum_{i=1}^{\ell} \kappa(h, h_i)^2$$

$$= 2\rho(h) + \kappa(h, h)$$

$$= (2\rho, \lambda) + (\lambda, \lambda)$$

$$= (\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\rho, \rho) \quad \square$$

Obs: $C\cdot(u\cdot v_\lambda) \overset{\text{centro}}{=} u\cdot(C\cdot v_\lambda) = u\cdot c_\lambda v_\lambda$
$= c_\lambda\, u\cdot v_\lambda \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Lema B Cada módulo de Verma es de longitud finita
($\exists\ 0 = V^{(0)} \subset V^{(1)} \subset \dots V^{(k)} = V(\lambda)$ submód
t.q. $V^{(i)}/V^{(i-1)}$ simple $i=1,2,\dots,k$),
y cada subcociente simple de $V(\lambda)$ es un módulo de peso más alto $L(\mu)$ con $\mu \le \lambda$ y $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ (*)

Dem: La última afirmación sigue de Lema A, ya que el el. de Casimir actua sobre cada subcociente de $V(\lambda)$ por el mismo escalar. Si este subcociente es de la forma $L(\mu)$, entonces $(\mu+\rho,\mu+\rho)-(\rho,\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\rho,\rho)$ ✓
Esto implica que solamente hay un # finito de pesos que califican como posibles ~~ma~~ pesos máximos de algún subfactor simple de $V(\lambda)$:
$\mu \le \lambda$ (claro) $\Rightarrow \lambda-\mu \in \Gamma^+$

L40m2

Explic

$$0 = S^{(0)} \subset S^{(1)} \subset \dots S^{(i-1)} \subset S^{(i)} \subset \dots \subset S^{(r)} = V(\lambda)$$

$\uparrow$

$L(\mu_i)$

$$\Rightarrow \quad ch(V(\lambda)) = \sum_{i=1}^{r} ch(L(\mu_i))$$

<u>Prop.</u> (Fórmula de characteres de Kostant) Para $\lambda \in \Lambda^+$ tenemos

$$ch(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} ch\, V(w \cdot \lambda))$$

<u>Ejémplo</u> $\not{g} = sl_2(\mathbb{C})$

$\lambda = m \cdot \rho$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

De la dimensión de los módulos de Verma (Lema B en 5.3) obtenemos en este caso una sucesión corta exacta

$$0 \to V((-m-2)\rho) \to V(m \cdot \rho) \to L(m \cdot \rho)$$

$$\Rightarrow ch(L(m\cdot\rho)) = ch(V(m\cdot\rho)) - ch(V(s_\alpha(m\cdot\rho)))$$

✓

Explic

$$0 = S^{(0)} \subset S^{(1)} \subset \dots S^{(i-1)} \subset S^{(i)} \subset \dots \subset S^{(r)} = V(\lambda)$$

$$L(\mu_i)$$

$\Rightarrow$

$$ch(V(\lambda)) = \sum_{i=1}^{r} ch(L(\mu_i))$$

<u>Prop.</u> (Fórmula de characteres de Kostant) Para $\lambda \in \Lambda^+$ tenemos

$$ch(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} ch\, V(w \cdot \lambda))$$

<u>Ejemplo</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$\lambda = m \cdot \rho$ con $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

De la dimensión de los módulos de Verma (Lema B en 5,3) obtenemos en este caso una sucesión corta exacta

$$0 \to V((-m-2)\rho) \to V(m\rho) \to L(m \cdot \rho)$$

$$\Rightarrow ch(L(m \cdot \rho)) = ch(V(m \cdot \rho)) - ch(V(s_\alpha(m \cdot \rho)))$$