Tarea 5

Ejercicio 18 (sistema de raices de tipo C_n)
Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C})$ consiste de todas las matrices que tienen una forma de bloques (de tamaño $n \times n$)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ con } A^t = -D, B^t = B \text{ y } C^t = C.$$

Verifica las siguientes afirmaciones: En este conjunto, las matrices diagonales

$$\mathfrak{h} := \{\mathrm{diag}(h_1,\ldots,h_n,-h_1,\ldots,h_n) \mid (h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

forman un subálgebra de Cartan. Denotamos con $\epsilon_i\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ la forma lineal que asigna a una matriz su n-ésima entrada diagonal, entonces los ϵ_i con $1 \leq i \leq n$ son una base de $\mathfrak{h}^*$, y obtenemos el sistema de raíces

$$R := \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i,j \leq n\} \setminus \{0\}$$

con $2n^2$ elementos. Generadores de los espacios de raíces son las matrices (en la arriba mencionada forma de bloques) de los siguientes tipos

- $A = -D^t = E_{i,j}$ y $B = C = 0$ para $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $i \neq j$,
- $B = E_{i,j} + E_{j,i}$ y $A = D = C = 0$, para $1 \leq i \leq j \leq n$,
- $C = E_{i,j} + E_{j,i}$ y $A = D = B = 0$, para $1 \leq i \leq j \leq n$.

Encuentra para cada raíz $\alpha \in R$ la coraíz correspondiente $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$.

Ejercicio 19 (sistema de raíces de tipo D_n)
Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ consiste de matrices con una estructura de bloques como en el ejercicio anterior, pero los bloques tienen que cumplir las condiciones $A^t = -D, B^t = -B$ y $C^t = -C$. Repita el "programa" del ejercicio anterior. Pista: hay nuevamente un subálgebra de Cartan de dimensión n que consiste de matrices diagonales. Las raíces tienen una forma similar, pero en este caso hay $2n(n-1)$ de ellas.

Ejercicio 20 (racionalidad y poitividad de la forma de Killing)

(a) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre los complejos y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un subálgebra de Cartan. Sea $\mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ la envolvente $\mathbb{Q}$-lineal de todas las coraíces, en formulas $\mathfrak{h}_\mathbb{Q} := \mathrm{span}_\mathbb{Q}\{\alpha^\vee \mid \alpha \in R(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\}$. Demuestra que para $h, h' \in \mathfrak{h}_\mathbb{Q}$ se tiene $\kappa(h,h') \in \mathbb{Q}$ y que $\kappa(h,h) \leq 0$ implica $h = 0$.

(b) Sea $k \subset K$ una extensión de campos, y V un K-espacio vectorial con una sistema finito de (K-) generadores R. Además sea L un sistema finito de (K-) generadores del espacio dual V^* tal que $\langle \lambda, r \rangle \in k$ para todo $\lambda \in L$ y $r \in R$. Demuestra que entonces

$$\dim_k \operatorname{span}_k(R) = \dim_K V = \dim_k \operatorname{span}_k(L),$$

y que la restricción identifica a $\operatorname{span}_k(L)$ con el dual de $\operatorname{span}_k(R)$.

Concluya que en (a) tenemos $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$.

Ejercicio 21 (elementos regulares y semisimples)

Este ejercicio requiere algo de geometría algebraica elemental. Sea k un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k. Un elemento $x \in \mathfrak{g}$ se llama *regular* si su centralizador en $\mathfrak{g}$ tiene la mínima dimensión posible, en formulas

$$\dim_k \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) = \min\{\dim_k \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y) \mid y \in \mathfrak{g}\} =: \operatorname{rank} \mathfrak{g}\,.$$

Escribimos $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ para el conjunto de los elementos regulares de $\mathfrak{g}$.

(a) Demuestra que el conjunto d $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ es abierto y denso de $\mathfrak{g}$.

(b) Sea a partir de ahora además $\operatorname{char}(k) = 0$ y $\mathfrak{g}$ semisimple. Deriva de nuestra demostración sobre la conjugación de subálgebras de Cartan que $\mathfrak{g}$ contiene un subconjunto constructible y denso de elementos semisimples (que son regulares).

(c) Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un subálgebra de Cartan. Los elementos de $\mathfrak{h}$ que son regulares en el sentido de (a) son precisamente los elementos de $\mathfrak{h}$ que que no son anulados por ninguna raíz de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. En formulas $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} = \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$.

(d) Demuestra que en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ los rayos de los elementos nilpotentes forman un subconjunto propio y cerrado $\mathcal{N}$. Pista: Argumenta primero con el polinomio característico de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ para ver que los elementos nilpotentes forman un conjunto cerrado en $\mathfrak{g}$.

(e) Demuestra que los elementos semisimples y regulares forman un subconjunto abierto y denso en $\mathfrak{g}$. Pista: Demuestra que el conjunto $\mathcal{Z} := \{(x, [n]) \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \times \mathcal{N} \mid [x, n] = 0\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} \times \mathcal{N}$ y concluya que la proyección $\pi_1(\mathcal{Z})$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. Observa además, que $x \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ es semisimple si y solamente si no conmuta con ningún elemento nilpotente excepto el 0.

Fecha de entrega: 8 de Abril de 2020.