

Tarea 3**Ejercicio 10**

Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y \mathfrak{S}_n el grupo simétrico correspondiente. Escribimos Id_n para el elemento neutro de \mathfrak{S}_n . Demuestra:

- Sean $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ un m -ciclo y τ un elemento de \mathfrak{S}_n , entonces $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \tau(i_2), \dots, \tau(i_m))$.
- Las clases de conjugación en \mathfrak{S}_n están en biyección con las particiones de n , i.e. con el conjunto de sucesiones de números naturales (p_1, p_2, \dots, p_n) tal que $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$ y $p_1 + p_2 + \dots + p_n = n$.
- Si $\tau = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_r \in \mathfrak{S}_n$ es un producto de ciclos ajenos entonces $|\tau| = \text{mcm}(|\sigma_1|, \dots, |\sigma_r|)$, donde mcm denota el mínimo común múltiplo.
- $\{|\sigma| \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{10}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 30\}$
- Cada producto no trivial de dos transposiciones en \mathfrak{S}_n es un 3-ciclo ó producto de dos 3-ciclos.
- $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\text{Id}_n\}$ si $n \geq 3$.

Ejercicio 11

Sea $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Consideramos los elementos

$$\rho := (1, 2, \dots, n) \text{ y } \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

del grupo simétrico \mathfrak{S}_n . El subgrupo $\mathcal{D}_n := \langle \rho, \sigma \rangle$ se llama el *grupo diédrico* de grado n . Se identifica con el grupo de simetrías del n -gono regular.

- Verifica las siguientes relaciones entre los generadores: $\rho^n = \text{Id}_n$, $\rho^k \neq \text{Id}_n$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\sigma^2 = \text{Id}_n$, $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$.
- $\mathcal{D}_n \cong C_n \rtimes_{\phi} C_2$ para un homomorfismo de grupos $\phi: C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$, donde C_k denota un grupo cíclico de orden k .
- Verifica directamente que $|\mathcal{D}_n| = 2n$. Pista: considera los valores $\rho^i\sigma^j(1)$ y $\rho^i\sigma^j(2)$ para las parejas $(i, j) \in \{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1\}$.

(d) Encuentra un segundo elemento $\tau \in \mathcal{D}_n$ con $|\tau| = 2$ y $\mathcal{D}_n = \langle \sigma, \tau \rangle$.

(e) $Z(\mathcal{D}_n) = \{\text{Id}_n\}$ si n es impar.

Ejercicio 12

Demuestra: El grupo alternante \mathfrak{A}_4 es isomorfo al grupo de *rotaciones* del tetraedro regular. Pista: Identifica las 12 rotaciones del tetraedro, y verifica que cada una de estas rotaciones induce una permutación par de los 4 vertices del tetraedro.

Ejercicio 13

Un grupo G se llama *simple* si $\{e\}$ y G son los únicos dos subgrupos normales de G . Por ejemplo los grupos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con p un primo son los únicos grupos abelianos que son simples. Sea $N_\bullet := (G = N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_n = \{e\})$ una serie normal de G . La *longitud* de N_\bullet es el número de sus factores no triviales. N_\bullet se llama *serie de composición* de G si todos los factores N_{i-1}/N_i son simples o trivial. Sea $M_\bullet := (G = M_0 \geq M_1 \geq \dots \geq M_m = \{e\})$ otra serie normal. N_\bullet se llama *refinación* de M_\bullet si N_0, N_1, \dots, N_n es una subsecuencia de M_0, M_1, \dots, M_m . Las series N_\bullet y M_\bullet son *equivalentes*, si tienen la misma longitud, y además existe una biyección entre sus factores no triviales respectivos, tal que estos factores sean isomorfos. Demuestra:

- Todo grupo finito tiene una serie de composición.
- Todas las series de composición de un grupo finito *soluble* son equivalentes. (sin usar (e)).
- Sean $A \triangleleft A'$ y $B \triangleleft B'$ subgrupos de G . Entonces se tiene un isomorfismo de grupos cocientes

$$\frac{A(A' \cap B')}{A(A' \cap B)} \cong \frac{B(B' \cap A')}{B(B' \cap A)}.$$

Pista: $D := (A' \cap B)(A \cap B')$ es un subgrupo normal de $B' \cap A'$. Verifica que el $A(A' \cap B') \rightarrow (A' \cap B')/D, ax \mapsto xD$ (para $a \in A, x \in A' \cap B'$) esta bien definido y suprayectivo. Su nucleo es $A(A' \cap B)$. Aprovecha la simetría del problema.

- Las dos series normales (arbitrarias) N_\bullet y M_\bullet del grupo G admiten refinaciones que son equivalentes. Pista: Sea $N_{i,j} := N_{i+1}(N_i \cap M_j)$. Entonces

$$N_{0,0} \geq N_{0,1} \geq \dots \geq N_{0,m} \geq N_{1,0} \geq \dots \geq N_{n-1,0} \geq \dots \geq N_{n-1,m} = \{e\}$$

es una refinación de N_\bullet . Se puede definir una refinación análoga de M_\bullet .
Usando (c), demuestra $N_{i,j}/N_{i,j+1} \cong M_{i,j}/M_{i+1,j}$.

- (e) Todas las series de composición de un grupo G son equivalentes. Pista:
Utiliza (d).

A discutir en la Ayudantía del 8 de Septiembre 2023.