

Tarea 11**Ejercicio 42**

Determina para los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$ un conjunto generador para su campo de descomposición sobre \mathbb{Q} , y calcula en cada caso el grado de estos campos sobre \mathbb{Q} :

$$X^4 - 2X^2 + 9, \quad X^4 - 16X^2 + 4, \quad X^4 + 4, \quad X^3 - 7, \quad X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3$$

Ejercicio 43

Sea $f = X^3 + X^2 - Y \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

- (a) Demuestra que $A = \mathbb{Q}[X, Y]/(f)$ es un dominio entero que contiene a \mathbb{Q} como un subanillo.
- (b) Demuestra que el homomorfismo de anillos

$$\alpha: \mathbb{Q}[X] \rightarrow A \text{ determinado por } \alpha|_{\mathbb{Q}} = \text{Id}_{\mathbb{Q}} \text{ y } \alpha(X) = X + (f)$$

es inyectivo.

- (c) ¿Es el campo de fracciones $\text{Frac}(A)$ algebraico sobre \mathbb{Q} ?

Ejercicio 44

Sea $K(T)$ el campo de funciones racionales sobre un campo K , y $U := \frac{f}{g} \in K(T)$ una función racional no constante ($f, g \in K[T]$ con $\deg(f) + \deg(g) \geq 1$ y $\text{mcd}(f, g) = K^*$). Demuestra:

- (a) U es trascendente sobre K .
- (b) $f(X) - Ug(X) \in (K(U))[X]$ es un polinomio irreducible con cero T en la extensión $K(T) \supset K(U)$.
- (c) $K(U) = K(T)$ si y solamente si $\max\{\deg(f), \deg(g)\} = 1$.
- (d) Los K -automorfismos σ de $K(T)$ son precisamente de la forma

$$\sigma(T) = \frac{aT + b}{cT - d} \quad (a, b, c, d \in K; ad - bc \neq 0)$$

Ejercicio 45

(Independencia lineal de caracteres). Sea K un campo, $K^* := K \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de K . Para un grupo G , un carácter de G en K es un homomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow K^*$. Demuestra: Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son caracteres de G en K^* con $\varphi_i \neq \varphi_j$ para $i \neq j$, entonces $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es una familia linealmente independiente en el espacio K^G de mapeos de G en K . Instrucciones:

- (a) Tenemos que demostrar que para elementos $a_1, \dots, a_n \in K$ el sistema de ecuaciones

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(g) = 0 \text{ para todo } g \in G$$

solo tiene la solución trivial.

- (b) Procedemos por inducción sobre n . Verifica el caso $n = 1$.
- (c) Para el paso $n - 1 \mapsto n$ escogemos $h \in G$ con $\varphi_1(h) \neq \varphi_n(h)$. Multiplica por un lado (*) con $\varphi_n(h)$ y por otro lado sustituya g por hg . Compara.

A discutir apartir de la ayudantía del 24 de Noviembre.