Ejemplo / Prop. Sea $\Bbbk$ un campo alg. cerrado con $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ $(\Bbbk = \mathbb{C})$ y $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) = \mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$

(a) $\forall\, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe salvo isomorfía una única representación simple (=irred) $L^{(m)}$ con $\dim L^{(m)} = m$

(b) Sea $\{e, f, h\}$ la base de $\mathfrak{g}$ con $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$

$\left(h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

entonces

$$L^{(m+1)} = L_m \oplus L_{m-2} \oplus \cdots \oplus L_{-m}$$

suma directa de espacios de dim 1

tal que $h \cdot L_j \subset L_j \quad \forall\, j = m, m-2, \ldots, -m$

además, $L_j = \mathbb{C} \cdot \ell_j$ y

$h \cdot \ell_j = j\, \ell_j$

Si $L_j \neq 0 \neq L_{j+2}$ entonces

$$L_j \underset{f\cdot}{\overset{e\cdot}{\underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}}}} L_{j+2}$$

• Obs. $L^{(1)}$ rep. trivial

$L^{(2)}$ rep. natural

$L^{(3)}$ es la rep. adjunta (!)

• Se puede demostrar de forma directa que cada rep. de dim. fin. de $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es una suma directa de estas rep. irreducibles

No lo vamos a hacer porque más adelante veremos un resultado general que implica esto.

- Si $\text{char}(k) \neq 0$ la clasificación de las representaciones de dim finita es mucho más complicada.

<u>Dem:</u> Sea $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una rep. de $\mathfrak{g}$ (de dim finita)

Para cada $\mu \in k$ sea

$$V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu \cdot id_V)$$

el espacio propio de valor μ para la acción de h sobre V.

Notamos ahora que

$e : V_\mu \subset V_{\mu+2}$)

$f : V_\mu \subset V_{\mu-2}$

ya que $h \cdot v = \mu \cdot v$ implica

$$h(ev) = e\cdot(h\cdot v) + [h,e]\cdot v$$
$$= e\cdot(\mu v) + 2e\cdot v$$
$$= (\mu+2)\, ev$$

con fv es similar.

Como V es de dimensión finita seguramente existe un $\lambda \in k$ t.q.

$$V_\lambda \neq 0 = V_{\lambda+2}$$

Entonces $e \cdot V_\lambda = 0$

y $h \cdot v = \lambda v \quad \forall v \in V_\lambda$

Ej.: Usando inducción vemos que

$$h \cdot (f^i v) = (\lambda - 2i) f^i v \quad (✓)$$

(*): $$e (f^i v) = i(\lambda - i + 1) f^{i-1} v$$

$$\forall i \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (!)$$

($f^i v := \underbrace{f(\cdots(f(f\cdot v)))}_{i\text{-veces}}$)

En particular, la envolvente $\mathbb{R}$-lineal de los

$$(f^i v)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

es una subrep. de V.

Si $f^i v \neq 0$ entonces los $(v, fv, f^2 v, \dots, f^i v)$ son linealmente independientes porque son vectores propios de f

para valores propios diferentes 1 a uno (λ, $\lambda-2$, ..., $\lambda-2i$)

Si además suponemos que V mismo es de dim finita entonces existe un $d \geq 1$ con $f^d \cdot v = 0$

Si escogemos d mínimo con $f^d \cdot v = 0$ entonces $(v, fv, \dots, f^{d-1} \cdot v)$ es una base de V,

Además con $f^d \cdot v = 0$ también

tenemos

$$0 = e\cdot(f^{d}\cdot v) \overset{(*)}{=} d(\lambda - d+1)\underbrace{(f^{d-1}\cdot v)}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow d(\lambda - d+1) = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda = d-1.$$

Esto demuestra que cada dos representaciones simples de $\mathfrak{g}$ de dimensión d son isomorfas ya que las matrices de $\varsigma(h)$, $\varsigma(e)$ y $\varsigma(f)$ en la base de vectores propios de $\varsigma(h)$

van a ser las mismas

Por ejemplo $d = 4$

$$\rho(h) = \begin{pmatrix} 3 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -3 \end{pmatrix} \qquad \rho(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para verificar que para cada d exista una rep. simple de dim. d en un principio tendríamos que

que las matrices correspondientes cumplan las relaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Es posible, pero no muy ilustrativo.

En lugar de eso vamos a realizar todas estas representaciones simultaneamente

Sea $V = \mathbb{C}[x, y]$ el anillo de polinomios en dos variables

Definimos una rep. S sobre V

$\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ dado

$$\rho(e) = x\,\partial_y$$

$$\rho(f) = y\,\partial_x$$

$$\rho(h) = x\,\partial_x - y\,\partial_y$$

V tiene como k-base los monomios $x^i y^j$ $\quad i,j = 0,1,2,\dots$

$$\rho(e)\, x^i y^j = (x \cdot \partial_y)\, x^i y^j$$

$$= j\, x^{i+1} y^{j-1}$$

$$\rho(f)\, x^i y^j = (y\,\partial_x)\, x^i y^j$$
$$= i\, x^{i-1} y^{j+1}$$

$$\rho(h)\, x^i y^j = (i-j)\, x^i y^j$$

$$\rho(f)\circ\rho(e)\, x^i y^j = j(i+1)\, x^i y^j$$
$$\rho(e)\circ\rho(f)\, x^i y^j = i(j+1)\, x^i y^j$$

$$\Rightarrow \big(\rho(e)\rho(f) - \rho(f)\rho(e)\big)\, x^i y^j$$
$$= \big(i(j+1) - j(i+1)\big)\, x^i y^j$$
$$= (i-j)\, x^i y^j$$

$$= g(h)\, x^i y^j \quad \checkmark$$

$$g(h)\,g(e)\, x^i y^j$$

$$= g(h)\,\left(j\, x^{i+1} y^{j-1}\right)$$

$$= \left[(i+1)-(j-1)\right] j\, x^{i+1} y^{j-1}$$

$$= (i-j+2)\, j\, x^{i+1} y^{j-1}$$

$$g(e)\,g(h)\, x^i y^j$$

$$= g(e)\,(i-j)\, x^i y^j$$

$$= j\,(i-j)\, x^{i+1} y^{j-1}$$

$$\therefore \left(g(h)g(e) - g(e)g(h)\right) x^i y^j$$

$$= \underbrace{(i-j+2)\,j - (i-j)\,j}_{2j}\; x^{i+1} y^{j-1}$$

$$= 2\, g(e)\, x^{i+1} y^{j-1} \checkmark$$

etc.

$\therefore$ Tenemos una representación g de $sl_2(k)$ sobre $V = k[x,y]$.

Esta representación obviament no es simple. Más precisament se dejá claramente invariantes a los subesp.

$\mathbb{C}[x,y]_n$ de polinomios homogeneos de grado n

El espacio

$\mathbb{C}[x,y]_n$ tiene dimensión $n+1$

$(x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n)$

es una base

Si abreviamos $w_i := y^i x^{m-i}$

entonces observamos

$$\boxed{\begin{aligned} e \cdot w_i &= i\, w_{i-1} \\ f \cdot w_i &= (m-i)\, w_{i+1} \\ h \cdot w_i &= (m-2i)\, w_i \end{aligned}}$$

Con eso vemos que la rep. $\mathbb{C}[x,y]_m$ es simple!

Porque: Si $V < \mathbb{C}[x,y]_m$ fuera una subrep, entonces tiene que contener un vector propio de R, digamos w_i.

Pero, con e y f podemos generar a partir de w_i todos los otros $w_1, \dots, w_n$ $\square$

Obs en la base de los w_i's los operadores $S(e), S(f)$ y $S(h)$ se ven más simétricos;

$$\rho(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ n & 0 & & & 0 \\ & n-1 & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(e) = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & -n \end{pmatrix}$$

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$