Christof Geiss

Tarea 4

Ejercicio 14
Sean U, V, W representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un campo k.

(a) Demuestra que los homomorfismos canónicos de espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \to \mathrm{Hom}_k(U \otimes V, W) \text{ y } U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W$$

son isomorfismos de representaciones. Concluya que se tiene un isomorfismo de adjunción $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$.

(b) El mapeo $\mathfrak{g} \otimes V \to V, x \otimes v \mapsto x \cdot v$ es un homomorfismo de representaciones de $\mathfrak{g}$ si interpretamos a $\mathfrak{g}$ como la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. El mapeo $V \otimes W \to W \otimes V, v \otimes w \mapsto w \otimes v$ es un isomorfismo de representaciones.

(c) Un elemento $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que es $\mathfrak{g}$-invariante, induce un endomorfismo $\Omega^{V \otimes W} \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V \otimes W)$.

Ejercicio 15
Denotamos con $L(m)$ la única representación simple de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de dimensión $m + 1$. Demuestra que tenemos un isomorfismo de representaciones

$$L(m) \otimes L(n) \cong \bigoplus_{k=0}^{\text{mín}\{m,n\}} L(m + n - 2k).$$

Pista: Estudia los h-espacios propios.

Ejercicio 16
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre los complejos. Si $x \in \mathfrak{g}$ escribimos $x = x_s + x_n$ para su descomposición de Jordan absoluta. Demuestra: Para $x, y \in \mathfrak{g}$ con $[x, y] = 0$ se tiene $(x + y)_s = x_s + y_s$ y $(x + y)_n = x_n + y_n$

Ejercicio 17
Determina para todas las matrices $x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ explícitamente la descomposición de Jordan (concreta) $x = x_s + x_n$. Instrucción: Utiliza el polinomio característico para identificar los conjunto de las matrices nilpotentes y de las matrices con dos valores propios diferentes. Solo las matrices restantes tienen posiblemente una descomposición no trivial.

Fecha de entrega: 15 de Marzo de 2024.