

3.5 Bases y cámaras de $\text{ker } \ell$

Recordemos $\Phi \subset E$ síst. de raíces.

$\Delta \subset \Phi$ base : $\Leftrightarrow$

(B1) Δ es $\mathbb{R}$ -base de E

(B2) $\forall \beta \in \Phi$ sea $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} \ell_{\alpha}^{\beta} \alpha$,

entonces $\ell_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{Z} \ \forall \alpha \in \Delta$ y
tenemos coherencia de signos:

$\circ \ell_{\alpha}^{\beta} \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta$ o $\ell_{\alpha}^{\beta} \leq 0 \ \forall \alpha \in \Delta$

$\leadsto \Phi = \Phi^{+} \cup \Phi^{-}$ con

$$\Phi^{+} := \{ \beta \in \Phi \mid \ell_{\alpha}^{\beta} \geq 0 \ \forall \alpha \in \Delta \}$$

$$\Phi^{-} := \{ \beta \in \Phi \mid \ell_{\alpha}^{\beta} \leq 0 \ \forall \alpha \in \Delta \}$$

y $\Phi = \Phi^{+} \cup \Phi^{-}$ si Δ es base y

en este caso $\Phi^{-} = -\Phi^{+}$

Observamos: Si $\Delta \subset \Phi$ es base de Φ

entonces $(\alpha, \beta) \leq 0 \ \forall \alpha, \beta \in \Delta$ y $\alpha \neq \beta$,

ya que $(\alpha, \beta) > 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \Phi$ $\downarrow$

Teorema Cada sistema de raíces $\Phi \subset E$ tiene una base.

La dem. no es fácil. Idea.

Para cada $\alpha \in \Phi$ sea

$$H_\alpha := \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\} \quad \text{hiperplano}$$

$$E_{\text{reg}} := E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$$

Para $\gamma \in E_{\text{reg}}$ sea

$$\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) > 0\}$$

$$\Phi^-(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma, \alpha) < 0\}$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma) \quad (\gamma \notin P_\alpha \forall \alpha \in \Phi)$$

Decimos que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ es

descomponible si $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ para

ciertos $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ y decimos

que α es indecomponible en otro

caso. La idea es que los elementos

indecomponibles de $\Phi^+(\gamma)$ forman

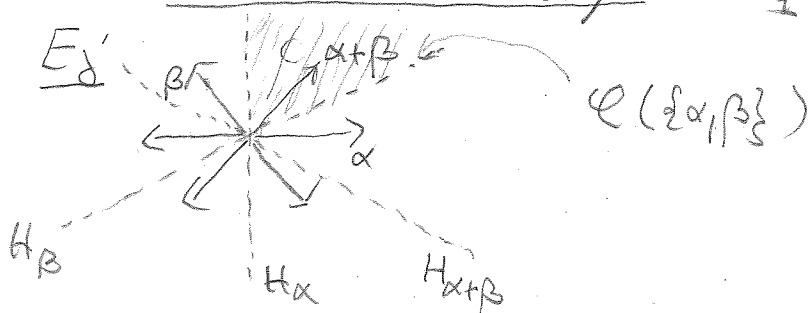
una base de Φ .

y de hecho toda base de Φ se

es de esta forma...



Def. Las componentes conexas de $E_{\text{reg}} = E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_{\alpha}$ se llaman las cámaras de Weyl de Φ .



Obs. Cada $\gamma \in E_{\text{reg}}$ pertenece a una única cámara de Weyl $C(\gamma)$ y $C(\gamma) = C(\gamma') \Leftrightarrow \Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$
 $\Leftrightarrow \Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ Losos de índices, i.e. cámaras de Weyl $\xrightarrow{1:1}$ bases de Φ
 $C(\Delta) := \{ \gamma \in E \mid (\gamma, \alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta \}$ es la cámara fundamental relativa a Δ y $C(\Delta) = \{ \gamma \in E_{\text{reg}} \mid \Delta(\gamma) = \Delta \}$!
 Obviamente el grupo de Weyl $W = W(\Phi)$ permuta a las cámaras de Weyl y a las bases de Φ , de forma compatible:
 $w(\Delta(\gamma)) = \Delta(w\gamma) \quad \forall w \in W, \forall \gamma \in E_{\text{reg}}$

3.6 Lemas sobre raíces simples

Def. Sea $\Delta \subset \Phi$ una base de Φ , entonces decimos que $\alpha \in \Phi$ es simple (cfr. a Δ) si $\alpha \in \Delta$.

Lema A Sea $\beta \in \Phi^+ \leftarrow \text{cfr. a } \Delta \text{ base}$ entonces existe $\alpha \in \Delta$ con $\beta - \alpha \in \Phi^+$ $\square$

Cor. A Para cada $\beta \in \Phi^+$ existe una sucesión de raíces simple (posiblemente con repeticiones)

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (r = \text{ht}(\beta))$$

t.q. $\sum_{i=1}^r \alpha_i \in \Phi^+ \quad \forall 1 \leq r \leq R$ y
 en part $\sum_{i=1}^R \alpha_i = \beta$. (claro).

Lema B Sea $\alpha \in \Delta$ (raíz simple), entonces

$$\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$$

(fácil por coherencia de signos)

Cor B Con $\delta_i = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ tenemos
 $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$.

Lema C Sea $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ una sucesión de raíces simples (repetidas permitidas) y pongamos

$$\sigma_i := \sigma_{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, t).$$

Si $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \in \Phi^-$, entonces existe $k \in \{1, 2, \dots, t\}$ t.q.
 $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_t = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_{t-1}$

Dem. idea Considerar

$$\beta_i := \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \in \Phi$$

$$i = 0, 1, \dots, t-1 \rightsquigarrow$$

$$\beta_0 \in \Phi^- \quad \gamma \quad \beta_{t-1} = \alpha_t \in \Phi^+$$

$$k = \min \text{ t.q. } \beta_k \in \Phi^+ = \dots$$

$$\Rightarrow \sigma_k(\beta_k) \in \Phi^- \xrightarrow{\text{Lema B}} \beta_k = \alpha_k \dots \square$$

Cor. Sea $w \in W$ y

$w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_t$ una factorización en reflexiones simples, i.e.

$\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ con $\alpha_i \in A$ ($i=1, 2, \dots, t$) de longitud mínima, entonces
 $w(\alpha_t) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{t-1}(-\alpha_t) \in \Phi^-$

claro $\square$

3.7. El grupo de Weyl

Teorema Sea Δ una base del sist.
de raíces $\Phi \subset E$. Entonces vale:

- (a) Si $\gamma \in E_{\text{reg}} \equiv E \setminus \bigcup_{\beta \in \Phi} H_{\beta}$, entonces
existe $w \in W$ t.q.
 $(w(\gamma), \alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$.

En particular, W actúa de forma
transitiva sobre el conju. de
camaras de Weyl.

- (b) Si Δ' es otra base de Φ , entonces
existe $w \in W$ t.q. $w(\Delta') = \Delta$

(i.e. actúa de forma transitiva
sobre las bases)

- (c) Si $\alpha \in \Phi$, entonces existe $w \in W$
con $w(\alpha) \in \Delta$

- (d) $W = \langle \beta_{\alpha} \mid \alpha \in \Delta \rangle$

- (e) Si $w(\Delta) = \Delta$ para algún $w \in W$,
entonces $w = \text{id}_E$.

i.e. W actúa de forma 1-transitiva
sobre el conju. de bases

Obs. La idea de la dem es demostrar a) - c) para

$$W' := \langle \Delta_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \leq W.$$

Luego $W' = W$ fácil $\Rightarrow$ e).

Lo más difícil es a). Cor C

Por el Teorema, la siguiente definición tiene sentido:

Def. Sea $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ ($l = \dim E$)

y $\Delta_i = \Delta_{\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$) las refl. simples. Entonces para cada $w \in W$ definimos

$\ell_\Delta(w) = \ell(w)$ como el mínimo número m t.q. $w = \Delta_{i_1} \Delta_{i_2} \dots \Delta_{i_m}$ para una sucesión $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_2}, \dots, \Delta_{i_m}$ de reflexiones simples.

Con los lemas de 3.6 obtenemos:

Prop. 1 Para todo $w \in W$ tenemos

$$\ell(w) := |\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}|.$$

□

Def. $\ell(w)$ se llama longitud de la

Sea $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ la cerradura (top. métrica) de la cámara de Weyl fundamental $\mathcal{C}(\Delta)$, a la base Δ de Φ .

La siguiente Prop. implica que $\overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ es un dominio fundamental para la acción de W sobre E .

Prop. Para $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ y $w \in W$ con $w(\lambda) = \mu$ tenemos

$w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}$ con $s_{i_j}(\lambda) = \lambda$ para $i_1, i_2, \dots, i_m \Rightarrow \lambda = \mu$ $\square$

Ojo: $\overline{\mathcal{C}(\Delta)} = \{ \lambda \in E \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \forall \alpha \in \Delta \}$.

Ejemplo Sea $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

y $E = H_\gamma = \{ (k_1, \dots, k_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid k_1 + \dots + k_{n+1} = 0 \}$

$\Phi = \{ \underbrace{e_i - e_j}_{\alpha_{ij}} \mid 1 \leq i, j \leq n+1 \text{ y } i \neq j \}$

$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \leadsto$ base

y $s_{ij} \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ la matriz de permutation

que intercambia e_i con e_j

entonces $s_{ij}|_E = s_{\alpha_{ij}} \Rightarrow W(\Phi) \cong S_{n+1}$

y el hecho que S_{n+1} es generado por las transposiciones simples $\tau_1, \dots, \tau_n$ corresponde al hecho que $W(\Phi) = \{ s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n} \}$