

Tarea 1**Ejercicio 1**

Sea k un campo.

- (a) Sea $\mathfrak{g}$ un k -álgebra de Lie. Para $x \in \mathfrak{g}$ consideramos el endomorfismo k -lineal $\text{ad}(x)$ de $\mathfrak{g}$ que está definido por $\text{ad}(x): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y]$. Demuestra que el mapeo

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), x \mapsto \text{ad}(x),$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

- (b) Sea $A = (A, \cdot)$ un k -espacio vectorial junto con un mapeo k -bilineal $A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$. Entonces una *derivación* de A es un mapeo k -lineal $\delta: A \rightarrow A$ tal que $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b)$ para todo $a, b \in A$. Demuestra: $\text{Der}_k(A) := \{\delta \in \mathfrak{gl}(A) \mid \delta \text{ es derivación de } A\}$ es un subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$.

Ejercicio 2

Demuestra:

- (a) Salvo isomorfía solo hay dos álgebras de Lie complejas de dimensión 2.
- (b) Si $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}$ es una base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ con $[\tilde{h}, \tilde{e}] = 2\tilde{e}$ y $[\tilde{h}, \tilde{f}] = -2\tilde{f}$, entonces $[\tilde{e}, \tilde{f}] = \mu\tilde{h}$ para algún $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (c) El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es simple.

Ejercicio 3

Sea k un campo. Consideramos el mapeo k -lineal:

$$\rho: \mathfrak{gl}_n(k) \rightarrow \mathfrak{gl}(k[X_1, X_2, \dots, X_n]), E_{ij} \mapsto X_i \partial_j \text{ para todos } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Aquí, los E_{ij} forman la bases estándar de $\mathfrak{gl}_n(k)$. Demuestra:

- (a) ρ define una representación de $\mathfrak{gl}_n(k)$, y para cada $d \in \mathbb{N}_0$ los polinomios homogéneos de grado d forman un sumando directo $k[X_1, \dots, X_n]_d$ de esta representación.
- (b) En caso $\text{char}(k) = 0$ ó $\text{char}(k) > d$, la representación $k[X_1, \dots, X_n]_d$ de $\mathfrak{gl}_n(k)$ es simple.

Ejercicio 4

Sea $\mathbb{K}$ un campo con $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Demuestra:

(a) $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K}) = 2n^2 + n,$

(b) $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{so}_6(\mathbb{K})$ como álgebras de Lie.

Pista: Soergel: Halbeinfache Liealgebren 1.1.18

Fecha de entrega: 22 de agosto de 2025.