

Tarea 3**Ejercicio 9**

Sea V un espacio vectorial sobre un campo k , $f \in \text{End}_k(V)$ y $S \subset k$ sea el conjunto de los valores propios de f . Entonces

$$V'_\nu := \{v \in V \mid (f - \nu \text{Id}_V)^l v = 0 \text{ para algún } l \in \mathbb{N}\}$$

es el subespacio propio generalizado de f para el valor propio ν . Recordemos que $f(V'_\nu) \subset V'_\nu$, y en caso k es algebraicamente cerrado $V = \bigoplus_{\nu \in S} V'_\nu$. Demuestra, que si k es algebraicamente cerrado, y $W \subset V$ es un subespacio de V con $f(W) \subset W$, entonces

$$W = \bigoplus_{\nu \in S} (V'_\nu \cap W).$$

En particular, $W'_\nu = V'_\nu \cap W$, donde W'_ν es el espacio propio generalizado de $f|_W$ para el valor propio ν .

Ejercicio 10

Sea $\mathfrak{g}$ (con nuestras convenciones) un álgebra de Lie *nilpotente* sobre $\mathbb{C}$. Consideramos una representación V de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Para un *character* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ sea

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \text{para todo } x \in \mathfrak{g} \text{ existe un } n \in \mathbb{N} \text{ con } (x - \lambda(x) \text{Id}_V)^n \cdot v = 0\}.$$

Este espacio propio simultaneo generalizado se llama espacio de peso generalizado de V para el peso λ . Demuestra que V es, como representación de $\mathfrak{g}$, suma directa de sus espacios de peso generalizados. Instrucciones:

- (i) Demuestra que la suma de los diferentes espacios de peso es directa (en este momento como espacios vectoriales). Para eso supongamos que $0 = \sum_{i=1}^n v_i$ con $v_i \in V_{\lambda_i}$ con los λ_i diferentes. Entonces existe $x \in \mathfrak{g}$ tal que los $\lambda_i(x) \in \mathbb{C}$ sean todos diferentes!
- (ii) Demuestra la afirmación por inducción sobre la dimensión de V : Por el Teorema de Lie existe una subrepresentación L de V de dimensión 1 con $L \cong \mathbb{C}_\chi$ para un *character* χ , y consideramos la proyección $p: V \rightarrow V/L$. Analiza, con la ayuda del Ejercicio 7, las subrepresentaciones $p^{-1}((V/L)_\lambda)$ de V y aplica (i).

Ejercicio 11

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita.

- (a) Sean $I_1, I_2, \dots, I_r$ ideales simples de $\mathfrak{g}$ con $I_i \neq I_j$ para $i \neq j$, y A un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Demuestra que la adición induce un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie: $I_1 \times \dots \times I_r \times A \rightarrow \mathfrak{g}$.
- (b) Si el homomorfismo de (a) es un isomorfismo, demuestra que los ideales de $\mathfrak{g}$ son precisamente de la forma $I_{\nu_1} \oplus \dots \oplus I_{\nu_r} \oplus V$ para una subsecuencia $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_r$ de $1, 2, \dots, n$ y un subespacio V de A .
- (c) Demuestra: Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita, entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
- (d) Si $\mathfrak{g}$ es reductiva, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, es decir cada álgebra de Lie reductiva admite una descomposición única en un producto de un álgebra de Lie semisimple y su centro.

Ejercicio 12

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un campo $\mathbb{K}$. Demuestra: Para una representación V de $\mathfrak{g}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) V es semisimple, i.e. V es suma *directa* de (ciertas) subrepresentaciones simples de V .
- (b) V es suma de sus suprepresentaciones simples.
- (c) Cada suprepresentación U de V tiene una subrepresentación “complementaria” $U^\perp$ de V con $V = U \oplus U^\perp$.

Ejercicio 13

Sea $\rho: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, y $\rho_n: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(L_n)$ denota la representación simple de dimensión $n+1$. Denotamos con $\kappa: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ la forma de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

- (a) Demuestra que, en términos de la base estándar (e, h, f) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tenemos para el operador de Casimir

$$\begin{aligned} C_\kappa^V &= \frac{1}{4}(\rho(e)\rho(f) + \rho(f)\rho(e)) + \frac{1}{8}\rho(h)\rho(h) \\ &= \frac{1}{2}\rho(f)\rho(e) + \frac{1}{8}\rho(h)(\rho(h) + 2\text{Id}_V) \in \mathfrak{gl}(V). \end{aligned}$$

Concluya, que $C_\kappa^{L_n}$ actúa sobre la representación simple de dimensión $n + 1$ por el escalar $n(n + 2)/8$.

- (b) Demuestra que el operador de Casimir $C_\kappa^{\mathfrak{g}}$ de un álgebra de Lie semi-simple sobre los complejos actúa sobre la representación adjunta como la identidad.

Fecha de entrega: 19 de septiembre de 2025.