

Tarea 4**Ejercicio 14**

Sean U, V, W representaciones de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un campo k .

- (a) Demuestra que los homomorfismos canónicos de espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_k(U, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(U \otimes V, W) \text{ y } U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$$

son isomorfismos de representaciones. Concluya que se tiene un isomorfismo de adjunción $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, \mathrm{Hom}_k(V, W)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U \otimes V, W)$.

- (b) El mapeo $\mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V, x \otimes v \mapsto x \cdot v$ es un homomorfismo de representaciones de $\mathfrak{g}$ si interpretamos a $\mathfrak{g}$ como la representación adjunta de $\mathfrak{g}$. El mapeo $V \otimes W \rightarrow W \otimes V, v \otimes w \mapsto w \otimes v$ es un isomorfismo de representaciones.
- (c) Un elemento $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ que es $\mathfrak{g}$ -invariante, induce un endomorfismo $\Omega^{V \otimes W} \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V \otimes W)$.

Ejercicio 15

Denotamos con $L(m)$ la única representación simple de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de dimensión $m + 1$. Demuestra que tenemos un isomorfismo de representaciones

$$L(m) \otimes L(n) \cong \bigoplus_{k=0}^{\min\{m,n\}} L(m+n-2k).$$

Pista: Estudia los h -espacios propios.

Ejercicio 16

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple sobre los complejos. Si $x \in \mathfrak{g}$ escribimos $x = x_s + x_n$ para su descomposición de Jordan absoluta. Demuestra: Para $x, y \in \mathfrak{g}$ con $[x, y] = 0$ se tiene $(x + y)_s = x_s + y_s$ y $(x + y)_n = x_n + y_n$.

Ejercicio 17

Determina para todas las matrices $x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ explícitamente la descomposición de Jordan (concreta) $x = x_s + x_n$. Instrucción: Utiliza el polinomio característico para identificar los conjuntos de las matrices nilpotentes y de las matrices con dos valores propios diferentes. Solo las matrices restantes tienen posiblemente una descomposición no trivial.

Fecha de entrega: 10 de octubre de 2025.