

Tarea 5**Ejercicio 18 (sistema de raíces de tipo C_n)**

Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ consiste de todas las matrices que tienen una forma de bloques (de tamaño $n \times n$)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ con } A^t = -D, B^t = B \text{ y } C^t = C.$$

Verifica las siguientes afirmaciones: En este conjunto, las matrices diagonales

$$\mathfrak{h} := \{\text{diag}(h_1, \dots, h_n, -h_1, \dots, -h_n) \mid (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n\}$$

forman un subálgebra de Cartan. Denotamos con $\epsilon_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ la forma lineal que asigna a una matriz su n -ésima entrada diagonal, entonces los ϵ_i con $1 \leq i \leq n$ son una base de $\mathfrak{h}^*$, y obtenemos el sistema de raíces

$$R := \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n\} \setminus \{0\}$$

con $2n^2$ elementos. Generadores de los espacios de raíces son las matrices (en la arriba mencionada forma de bloques) de los siguientes tipos

- $A = -D^t = E_{i,j}$ y $B = C = 0$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $i \neq j$,
- $B = E_{i,j} + E_{j,i}$ y $A = D = C = 0$, para $1 \leq i \leq j \leq n$,
- $C = E_{i,j} + E_{j,i}$ y $A = D = B = 0$, para $1 \leq i \leq j \leq n$.

Encuentra para cada raíz $\alpha \in R$ la coraíz correspondiente $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$. Determina una base de este sistema de raíces.

Ejercicio 19 (sistema de raíces de tipo D_n)

Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ consiste de matrices con una estructura de bloques como en el ejercicio anterior, pero los bloques tienen que cumplir las condiciones $A^t = -D$, $B^t = -B$ y $C^t = -C$. Repita el “programa” del ejercicio anterior. Pista: hay nuevamente un subálgebra de Cartan de dimensión n que consiste de matrices diagonales. Las raíces tienen una forma similar, pero en este caso hay $2n(n-1)$ de ellas.

Ejercicio 20 (Forma de Killing para $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$)

En este ejercicio consideramos el álgebra de Lie simple $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ con su subálgebra de Cartan “estándar”

$$\mathfrak{h} := \{\text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_{n+1}) \mid (h_1, \dots, h_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ y } h_1 + h_2 + \dots + h_{n+1} = 0\}.$$

Además, denotamos con $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \text{Tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$.

- (a) Demuestra: $\kappa(x, y) = 2(n+1) \text{Tr}_{\mathbb{C}^{n+1}}(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ y verifica con eso directamente que κ es no degenerada.
- (b) Sea $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ definido por $\epsilon_i(h) = h_i$ para todo $h := \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_{n+1}) \in \mathfrak{h}$. Verifica que en este caso

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j \text{ y } 1 \leq i, j \leq n+1\}$$

es el sistema de raíces correspondiente, y determina el espacio de raíz $\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j}$ para todas las raíces $\epsilon_i - \epsilon_j$.

- (c) Sea $\alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ for $i = 1, 2, \dots, n$. Determina las coraíces $\alpha_i^\vee$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y calcula la matriz de Cartan $C := (\alpha_i(\alpha_j^\vee))_{1 \leq i, j \leq n}$.
- (d) Como en clase, usa κ para definir un isomorfismo $t_\gamma: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}$ y calcula $(\alpha_i, \alpha_j) := \kappa(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_j})$. Verifica que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es una base de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \text{span}_{\mathbb{R}} R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Ejercicio 21 (elementos regulares y semisimples)

Este ejercicio requiere algo de geometría algebraica elemental. Sea k un campo algebraicamente cerrado y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre k . Un elemento $x \in \mathfrak{g}$ se llama *regular* si su centralizador en $\mathfrak{g}$ tiene la mínima dimensión posible, en formulas

$$\dim_k \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x) = \min\{\dim_k \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(y) \mid y \in \mathfrak{g}\} =: \text{rank } \mathfrak{g}.$$

Escribimos $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ para el conjunto de los elementos regulares de $\mathfrak{g}$.

- (a) Demuestra que el conjunto $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ es abierto y denso de $\mathfrak{g}$.
- (b) Sea a partir de ahora además $\text{char}(k) = 0$ y $\mathfrak{g}$ semisimple. Deriva de nuestra demostración sobre la conjugación de subálgebras de Cartan que $\mathfrak{g}$ contiene un subconjunto constructible y denso de elementos semisimples (que son regulares).

- (c) Sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un subálgebra de Cartan. Los elementos de $\mathfrak{h}$ que son regulares en el sentido de (a) son precisamente los elementos de $\mathfrak{h}$ que no son anulados por ninguna raíz de $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. En formulas $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}} = \mathfrak{h}_{\text{reg}}$.
- (d) Demuestra que en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ los rayos de los elementos nilpotentes forman un subconjunto propio y cerrado $\mathcal{N}$. Pista: Argumenta primero con el polinomio característico de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ para ver que los elementos nilpotentes forman un conjunto cerrado en $\mathfrak{g}$.
- (e) Demuestra que los elementos semisimples y regulares forman un subconjunto abierto y denso en $\mathfrak{g}$. Pista: Demuestra que el conjunto $\mathcal{Z} := \{(x, [n]) \in \mathfrak{g}_{\text{reg}} \times \mathcal{N} \mid [x, n] = 0\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}_{\text{reg}} \times \mathcal{N}$ y concluya que la proyección $\pi_1(\mathcal{Z})$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$. Observa además, que $x \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ es semisimple si y solamente si no conmuta con ningún elemento nilpotente excepto el 0.

Fecha de entrega: 24 de octubre de 2025.