

Tarea 7**Ejercicio 27**

Sea $\Phi \subset E$ un sistema de raíces con base Δ . Denotamos con $\mathcal{W}$ su grupo de Weyl. Demuestra:

(a) Las únicas reflexiones en $\mathcal{W}$ son las reflexiones de la forma s_γ con $\gamma \in \Phi$.

(b) Si $\alpha, \beta \in \Delta$ definimos

$$m(\alpha, \beta) := \begin{cases} 1 & \text{si } \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4, \\ 6 & \text{si } \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 3, \\ 4 & \text{si } \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 2, \\ 3 & \text{si } \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 1, \\ 2 & \text{si } \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, \end{cases}$$

entonces la “rotación” $s_\alpha s_\beta$ tiene orden $m(\alpha, \beta)$. (Se puede demostrar que $\mathcal{W}$, como grupo abstracto, es definido por las relaciones $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$ para $\alpha, \beta \in \Delta$.)

(c) $\mathcal{W}$ es isomorfo al producto directo de los grupos de Weyl de las componentes irreducibles de Φ .

(d) El grupo de Weyl de un sistema de raíces de tipo A_n es isomorfo al grupo simétrico $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Ejercicio 28

Sea Γ un diagrama de Dynkin (conexo) con l vértices y $C \in \mathbb{Z}^{l \times l}$ la matriz de Cartan correspondiente.

(a) Demuestra que todos los menores principales de C son positivos. *Pista:* Verifica primero los siguientes valores para $\det(C)$: $A_l : l + 1$, $B_l : 2$, $C_l : 2$, $D_l : 4$, $E_6 : 3$, $E_7 : 2$, $E_8 : 1$, $F_4 : 1$, $G_2 : 1$.

(b) Verifica que C es simetrizable, i.e. existe una matriz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_l)$ con los $d_i \in \mathbb{N}_+$ tal que $C \cdot D$ es simétrica. Obviamente podemos suponer $\text{mcd}(d_1, \dots, d_l) = 1$. Concluya con (a) que $C \cdot D$ es positivamente definida.

(c) Decimos que un diagrama de Dynkin es simplemente amarrado si su matriz de Cartan es simétrica. En este caso consideramos $E := \mathbb{R}^l$ con la base estándar $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ y definimos una forma bilineal vía $(\alpha_i, \alpha_j) =$

$\frac{1}{2}C_{i,j}$, convirtiendo así a E en un espacio euclidiano. Consideramos la retícula $Q := \sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i \subset E$. Demuestra que

$$\Phi := \{\beta \in Q \mid (\beta, \beta) = 1\}$$

es un sistema de raíces con base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ de tipo Γ . *Pista:* Considera $\mathcal{W}'$, el grupo generado por las reflexiones σ_{α_i} y Φ' , la unión de las $\mathcal{W}'$ -órbitas de los α_i . Demuestra primero que Φ' es un sistema de raíces con base $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Ejercicio 29

Sea $\Phi \subset E$ un sistema de raíces con $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ una base, Φ^+ las raíces positivas y $\varpi_1, \dots, \varpi_l \in E$ los pesos fundamentales correspondientes, i.e. $(\varpi_i, \alpha_j^\vee) = \langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, l$. Recuerda que definimos $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. Demuestra:

- (a) $\alpha_i = \sum_{j=1}^l \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \varpi_j$ para $i = 1, 2, \dots, l$.
- (b) $\rho = \sum_{i=1}^l \varpi_i$, en particular, ρ es un peso integral estrictamente dominante, i.e. $\langle \rho, \alpha_i \rangle > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, l$.
- (c) Sea $\mu \in \Lambda^+ := \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \forall i = 1, 2, \dots, l\}$, es decir μ es un peso integral dominante. Si $w \in \mathcal{W}$, es decir w es un elemento del grupo de Weyl de Φ , entonces $w(\lambda) \preceq \lambda$, i.e. $\lambda - w(\lambda) \in \sum_{j=1}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_j$.
- (c) En la situación de (c) tenemos $(w(\lambda) + \rho, w(\lambda) + \rho) \leq (\lambda + \rho, \lambda + \rho)$ con igualdad sólo si $w(\lambda) = \lambda$.

Fecha de entrega: 13 de noviembre de 2025.