Un problema de frontera en matemáticas

CARLOS PRIETO DE CASTRO

El propósito de este ensayo es presentar dos resultados que sacudieron las matemáticas durante los años ochenta. Se trata de la clasificación de las variedades de dimensión cuatro (4-variedades), simplemente conexas, realizada por M. Freedman, y del teorema de S. Donaldson, sobre diferenciabilidad de 4-variedades. Dar los resultados con el rigor adecuado se saldría completamente de la mira de este trabajo, de modo que, en vez de eso, con el objeto de plantearlos, haremos un recorrido a través de conceptos matemáticos mucho más accesibles. Así, presentaremos las superficies, su construcción y clasificación, como motivación para el resultado de Freedman. Ya que las superficies son hermosos objetos matemáticos de comprensión sencilla, esto debe equilibrar y hacer más accesible la parte más técnica requerida para plantear los resultados de Freedman y Donaldson.

Por otro lado, el lector menos cercano a la forma de pensar de los matemáticos puede, haciendo un pequeño esfuerzo, saltarse algunos detalles, si tiene *in mente* que el juego geométrico de este artículo es el planteamiento de similitudes y diferencias entre las superficies y las 4-variedades, en la misma forma que un geógrafo o un astrónomo podría plantear las similitudes y diferencias entre la superficie de la tierra (que es una esfera), y la 4-variedad (aún desconocida) que describe la forma del cosmos, es decir, del espacio tiempo de todos los eventos que constituyen el universo. [A este respecto vale la pena señalar la obra singular, que por su contenido y su belleza se ha convertido en un *best seller* a nivel mundial. Se trata del libro de S. Hawking, *A Brief History of Time* del cual ya hay una versión en español.]

Antes de entrar en el problema conviene iniciar la discusión hablando de un resultado clásico de la topología. Es un ejercicio relativamente simple el de imaginar el concepto de *superficie*. Se trata de un objeto geométrico, que en la cercanía de cada uno de sus puntos se ve como un plano. En la figura 1 se ilustran algunos ejemplos de superficies. Se trata de la superficie esférica, o simplemente *esfera* S^2, la superficie de una rosca, o simplemente *toro*, F_1.

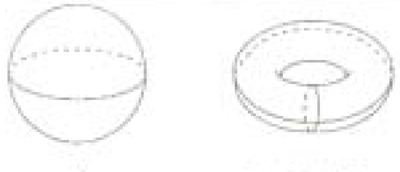
Se tiene también la superficie de un "brezel" (el panecillo alemán mal llamado "pretzel", que parece la superficie de dos roscas que al hornearse se quedaron pegadas), o *superficie orientable de género* 2, F_2. La superficie F_2 se obtiene de dos toros haciendo la operación *suma conexa*, que consiste en perforar sendos agujeros en los toros y pegar a ambos a lo largo de los bordes; es decir, $F_2 = F_1 \# F_1$. (Figura 2.)

Este proceso de suma conexa puede continuarse y así obtener $F_3, F_4, ..., F_g$. F_g es la *superficie conexa de género g.* (Figura 3.)

Un método alternativo de obtener las superficies orientables es como sigue. En el caso del toro podemos tomar un pedazo de "membrana elástica" con la forma de un cuadrado y pegar sus lados opuestos como se indica en la figura 4.

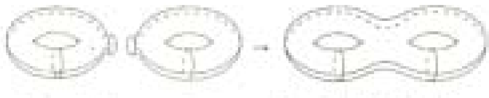
La construcción general de F_g se obtiene de un 4g-gono, o sea, un polígono regular con 4g lados, pegando sus lados como se indica.

Si seguimos jugando con esta idea, podemos, por ejemplo, tomar un cuadrado otra vez, pero ahora pegaremos los lados de manera muy distinta a la que seguimos en el ejemplo anterior; lo haremos como se indica en la figura 5. Obtendre-



S^2 $F_1 = S^1 \times S^1$. Toro

Figura 1.



Operación "suma conexa": # $F_2 = (S^1 \times S^1) \# (S^1 \times S^1)$
Brezel o superficie orientable de género 2

Figura 2.

$F_g = F_{g-1} \# F_1 = (S^1 \times S^1) \# \dots \# (S^1 \times S^1)$ g veces. *Superficie orientable de género g*

Figura 3.

Carlos Prieto de Castro: Instituto de Matemáticas, UNAM, CONACYT

mos algo todavía más difícil de imaginar, pues en el mundo en que vivimos no se podría llevar a cabo una construcción semejante; el resultado abstracto sí existe; sin embargo, no vive en el espacio euclidiano de 3 dimensiones, R^3.

En la figura 6 se ilustra, a pasos, la construcción anterior. Al resultado se le conoce como *botella de Klein*, N_2, o *superficie no orientable de género 2.*

Ésta es una *superficie no orientable*; es decir, podemos dar un paseo "alrededor" de N_2, y al volver "perdemos la orientación". En otras palabras, se intercambia la derecha por la izquierda. Corroborar esto, en el caso de la botella de Klein, es un ejercicio sencillo de imaginación.

Un ejemplo muy importante de objeto no orientable es la *banda de Möbius,* que es una superficie con frontera. Se construye tomando un cuadrado e identificando dos de sus lados opuestos, invirtiendo así su orientación, como se indica en la figura 7.

Si a una banda de Möbius le pegamos un disco a lo largo de su frontera, obtenemos una superficie no orientable conocida como el *plano proyectivo*, $N_1 = P^2$. (Figura 8.)

Esta construcción, sin embargo, tampoco puede realizarse en el espacio euclidiano de tres dimensiones. Si tomamos ahora dos bandas de Möbius y las pegamos a lo largo de su frontera (construcción que tampoco se puede realizar en el espacio de tres dimensiones), obtenemos una botella de Klein. Es un hecho que ninguna de las superficies no orientables sin frontera puede construirse dentro del espacio euclidiano de dimensión tres. Ya que la banda de Möbius es un plano proyectivo con un agujero, la botella de Klein resulta

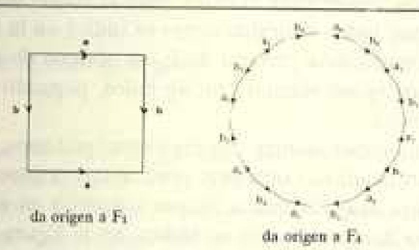


Figura 4.

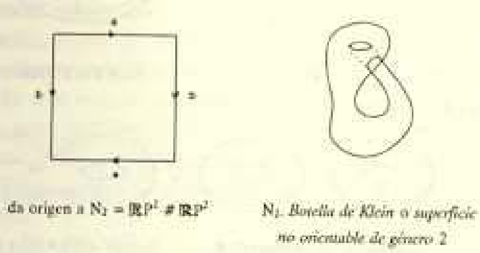


Figura 5.

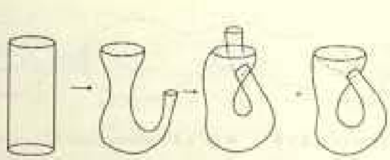


Figura 6.

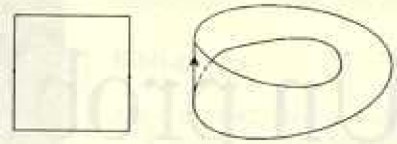


Figura 7.

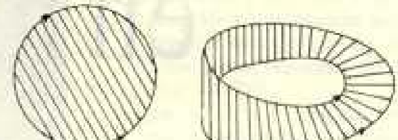


Figura 8.

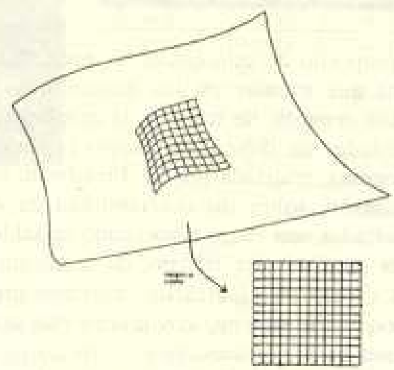


Figura 9.

ser una suma conexa de dos planos proyectivos, es decir, $N_2 = P^2 \# P^2$.

Como en el caso orientable, se puede continuar este proceso obteniendo las superficies $N_3, N_4, ..., N_g$, o sea, esta última, la *superficie no orientable de género g.*

Más formalmente, el concepto de *superficie* o de *variedad de dimensión 2* es el siguiente: es un objeto geométrico que localmente se ve como un plano. Es decir, es un objeto geométrico tal, que se pueden dibujar mapas de sus regiones. La figura 9 ilustra una porción de una superficie.

Decimos que la superficie, o variedad de dimensión 2, es *cerrada* si es acotada (no es infinita) y no tiene frontera; es decir, si no hay caminos que conduzcan al "infinito". Son ejemplos de variedades cerradas todas las variedades S^2, F_1, $F_2, ...$, N_1, N_2... Uno de los resultados centrales de la topología es el *Teorema de clasificación de superficies*. El caso orientable lo probó Möbius (1790-1868) en 1861, en un trabajo que sometió para el *Grand Prix de Mathématiques* de la Academia de Ciencias de París. A pesar de la trascendencia del resultado, ni éste ni ninguno de los otros trabajos matemáticos presentados fue considerado por el jurado. El resultado del planteamiento de Möbius es el siguiente:

TEOREMA. *Toda superficie cerrada está en la lista* S^2, F_1, $F_2, ...$, N_1, N_2...

El significado de esto es que cualquier superficie cerrada la podemos deformar, sin romperla, hasta convertirla en alguna de las de la lista, siempre y cuando imaginemos que hecha de alguna tela elástica. Por ejemplo, podemos con rar la superficie de una taza y la superficie de una rosc sea F1); es fácil ver que una se puede deformar y tran marse en la otra. (Figura 10.)

La clasificación de objetos geométricos reviste gran im tancia, desde otros aspectos de la ciencia, como la geogı la astronomía o la física. Por ejemplo, en la Edad Media se concebía a la tierra con un criterio local. La noción g que de ella se tenía era errónea. Se pensaba que la tierr plana, porque localmente así se percibe. ¿Cómo decidir, de una perspectiva local, qué forma tiene la tierra?

Efectivamente, la tierra localmente es "plana": los c grafos lo habían demostrado incansablemente. Hacer maj planos de regiones de la tierra, muestra que ésta se ve l mente como un plano. De ahí, sin embargo, no se puede cluir que globalmente sea plana. (Figura 11.)

El aceptar que la tierra rota y que, por lo tanto, tien metría rotacional, no resuelve el problema; la tierra podri ser una esfera, incluso bien podría ser un toro, como se v la figura 12.

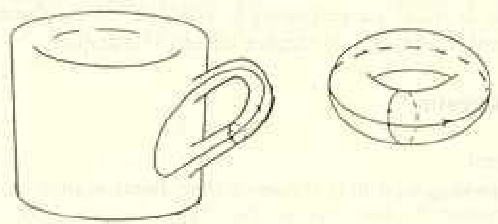


Figura 10.

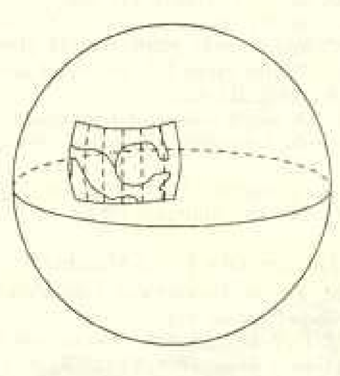


Figura 11.

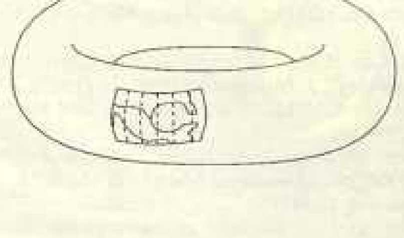


Figura 12.

Los objetos que hasta ahora hemos estudiado se pue describir localmente por dos coordenadas reales. Subyac ellos, así, el concepto de plano euclidiano o espacio eucl no de dimensión dos, R^2, que se obtiene del concepto de *ta real*, R, donde viven los números reales, tomando pa de éstos. Si cambiamos el concepto de recta real, R, pc concepto de *plano complejo*, C, donde viven los núm complejos, y en el cual, por cierto, todas las ecuaciones nomiales tienen solución, construimos un espacio de dir sión 4, que consiste de parejas, ahora de números compl en analogía con el plano cartesiano que consiste de pa de números reales. En otras palabras, el plano complej un espacio euclidiano de dimensión dos, con una estruc de conjunto de números, y su correspondiente espacio de rejas C^2, es un espacio euclidiano de dimensión cuatro.

Usando este espacio de dimensión cuatro, podemos lle desde el concepto de variedad que localmente se ve com plano, al de una variedad que localmente se ve como u pacio de dimensión cuatro y que, localmente, se puede cribir por dos coordenadas complejas; es decir, llegam concepto de *4-variedad*. Este concepto tiene en matemá un significado muy importante; sin embargo, transgred frontera de las matemáticas. Según la física, nuestro univ tiene cuatro dimensiones; es ésta la visión del espacio-tie Como en el medioevo con la tierra, la visión que actualm tenemos del universo es local, y localmente se ve como R decir, como el espacio euclidiano de dimensión cuatro. E una 4-variedad. Pero, ¿qué forma tiene globalmente?

Mike Freedman obtuvo el máximo galardón que se ot a un matemático, la *Medalla Fields*, en 1986, por su clasi ción de las 4-variedades cerradas, orientables, simplem conexas (es decir, tales que cualquier trayectoria cerrad ellas puede contraerse), clasificación que tiene un asomb parecido con la de las superficies. Antes de enunciarla viene reformular la clasificación de las superficies. Para mencionaremos, sin entrar en detalles, que a una supe puede asociársele una matriz simétrica canónica (la matr una forma bilineal llamada su forma de intersección). El rema de clasificación puede entonces reformularse, com expresa en la siguiente tabla:

S es una 2-variedad orientable	$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$	$S = (S^1 x S^1) \# ... \# (S^1 x S^1)$ $S = S^2$, la esfera, si la matriz es 0
S es una 2-variedad no orientable	$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$	$S = RP^2 \# ... \# RP^2$

Las matrices del primer tipo son de $2n$ x $2n$, si la s conexa tiene n términos, es decir, si la superficie es ori ble de género n, y, análogamente la segunda es de n x n, superficie es no orientable de género n. En el fondo lo esto dice es que para las matrices del primer tipo, la suj cie correspondiente es orientable de género igual a la n de la dimensión de la matriz, mientras que para las mat del segundo tipo, la superficie correspondiente es no orientable de género igual a la dimensión de la matriz.

De la misma forma que para las superficies, a cada 4-variedad cerrada, orientable, simplemente conexa, se le puede asociar una matriz simétrica canónica. Como en el caso de las superficies, esta matriz determina la variedad, e, inversamente, dada una variedad, a ésta le corresponde una matriz.

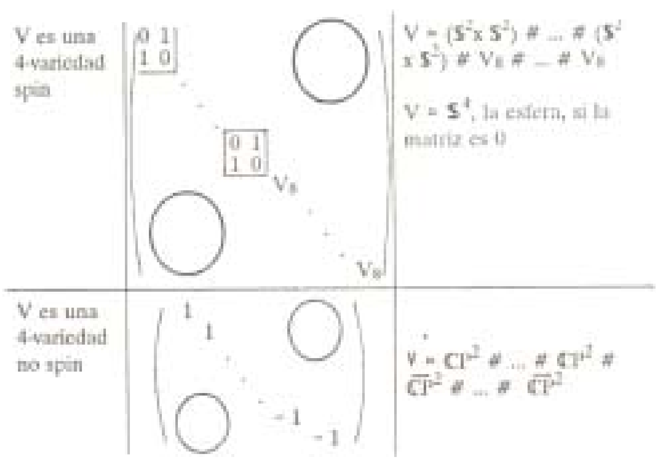
Hay una matriz "excepcional", de 8 x 8, a saber:

$$E_8 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a la que según el teorema de Freedman le corresponde una 4-variedad, V_8.

Simon Donaldson también obtuvo en 1986 la *Medalla Fields* por un trabajo extraordinario de interdisciplina, en el que usando varias áreas de las matemáticas, y basando sus argumentos en la *Teoría de campos de Yang-Mills*, que es una muy importante área de la física, estudió las matrices asociadas a una 4-variedad, en relación con la *estructura diferenciable* de la variedad. Vagamente, la estructura diferenciable permite realizar en la variedad, en la vecindad de cada uno de sus puntos, cálculo diferencial (o sea, derivadas de todos los órdenes)

De los resultados de Freedman se obtiene la clasificación de las 4-variedades cerradas, orientables, simplemente conexas, que admiten una estructura diferenciable, a saber:



Finalmente, para concluir este párrafo enunciaremos el resultado principal de Donaldson.

TEOREMA (Donaldson 1982). *Si V es una variedad de dimensión cuatro, simplemente conexa, compacta y tal, que su matriz asociada es definitivamente positiva, entonces su matriz canónica es*

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Este teorema de apariencia tan inocente, tiene dos aspectos centrales:

1. Su demostración depende de la teoría de Yang-Mills; es decir, es una aplicación de la física a las matemáticas.
2. Tiene vastas aplicaciones, incluyendo la secuela de investigación que ha dejado.

Una consecuencia asombrosa del teorema es la siguiente:

El espacio euclidiano de dimensión 4, R^4, admite una infinidad de estructuras diferenciables.

En su secuela tiene investigaciones recientes sobre la geometría diferencial de haces sobre variedades de dimensión cuatro, que llevan a cabo físicos y matemáticos, y que, entre otras muchas cosas, busca resolver el enigma de Einstein: *Explicar el campo unificado.*

¿Qué forma tendrá el universo? ¿Será la del espacio euclidiano R^4, o la de la esfera S^4, o la de alguna de las variedades de la lista? La respuesta la tendrán los astrónomos al incrementar aún más el alcance de sus telescopios.

Bibliografía

General

1. Hawking, S., *A Brief History of Time,* Bantam, 1988.
2. Penrose, R., *The Emperor's New Mind*, Penguin, 1991.

Topología de Variedades

3. Freedman, M. H., "The topology of 4-dimensional manifolds", *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 357-453.
4. Freedman, M. H., "There is no room to spare in four dimensional space", *Notices Amer. Math. Soc.*, 31, (1984), 3-6.
5. Gompf, R., "Three exotic R^4's and other anomalies, *J. Differential Geom.*, 18 (1983), 317-428.
6. Milnor, J., *On simply connected 4-manifolds,* Proc. Symposium Internacional de Topología Algebraica, UNAM, México, 1958, 122-128.
7. Stöcker, R., Zieschang, H., *Algebraische Topologie. Eine Einführung,* B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

Geometría Diferencial y Física Matemática

8. Atiyah, M. F., *The Geometry of Yang-Mills Fields,* Lezione Fermiane, Scuola Normale Sup., Pisa, 1979.
9. Atiyah, M. F., J. D. S., Jones, "Topological aspects of Yang-Mills Theory", *Comm. Math. Phys.*, 61 (1978), 97-118.
10. Atiyah, M. F., R. S. Ward, "Instantons and Algebraic Geometry", *Comm. Math. Phys.*, 55 (1977), 117-124.
11. Bourguignon, J. P., H. B. Lawson, Jr., "Yang-Mills Theory, its Physical Origins and Differential Geometric Aspects, *Ann. of Math. Stud.*, 102, Princeton Univ. Press, 1982, 395-421.
12. Donaldson, S. K., "Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds", *Bull. Amer. Math. Soc.* (N. S.) 8, (1983), 81-83.
13. Donaldson, S. K., "An application of gauge theory to 4-dimensional topology", *J. Differential Geom.* 18 (1983), 279-315.
14. Freed, D., K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds,* Springer, 1984.
15. Lawson, H. B. Jr., *The Theory of Gauge Fields in Four Dimensions,* Regional Conference Series in Math. 58, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1985.
16. Taubes, C. H., "Self-dual connections on non-self-dual 4-manifolds", *J. Differential Geom.* 17 (1982), 139-170.