

Configuraciones auto-duales y geometrías finitas

Carlos Segovia González

Instituto de Matemáticas UNAM Oaxaca, México

Colaboración con Monika Winklmeier

Febrero 15, 2018
Coloquio Oaxaqueño

Cómo comenzó la historia?

Cómo comenzó la historia?

- ▶ La categoría de G -cobordismos en dimensión $1+1$, denotada Cob^G , con G un grupo finito.

Cómo comenzó la historia?

- ▶ La categoría de G -cobordismos en dimensión $1+1$, denotada Cob^G , con G un grupo finito.
- ▶ El estudio del espacio clasificante

$$B \text{Cob}^G \simeq \frac{G}{[G, G]} \times X_G \times T^{r(G)},$$

con $T^{r(G)}$ el producto directo de $r(G)$ círculos.

Cómo comenzó la historia?

- ▶ La categoría de G -cobordismos en dimensión $1+1$, denotada Cob^G , con G un grupo finito.
- ▶ El estudio del espacio clasificante

$$B \text{Cob}^G \simeq \frac{G}{[G, G]} \times X_G \times T^{r(G)},$$

con $T^{r(G)}$ el producto directo de $r(G)$ círculos.

- ▶ $\pi_0 \text{Cob}^G = \frac{G}{[G, G]}$, $\pi_1 \text{Cob}^G = \mathbb{Z}^{r(G)}$.

Cómo comenzó la historia?

- ▶ La categoría de G -cobordismos en dimensión $1+1$, denotada Cob^G , con G un grupo finito.
- ▶ El estudio del espacio clasificante

$$B \text{Cob}^G \simeq \frac{G}{[G, G]} \times X_G \times T^{r(G)},$$

con $T^{r(G)}$ el producto directo de $r(G)$ círculos.

- ▶ $\pi_0 \text{Cob}^G = \frac{G}{[G, G]}$, $\pi_1 \text{Cob}^G = \mathbb{Z}^{r(G)}$.
- ▶ Donde $r(G) = r_1(G) + r_2(G) + \dots$, donde
- ▶ $r_n(G) = |\{(g_1, k_1), \dots, (g_n, k_n) : \prod_i [h_i, g_i] = 1\} / \sim|$.

Cómo comenzó la historia?

- ▶ La categoría de G -cobordismos en dimensión $1+1$, denotada Cob^G , con G un grupo finito.
- ▶ El estudio del espacio clasificante

$$B \text{Cob}^G \simeq \frac{G}{[G, G]} \times X_G \times T^{r(G)},$$

con $T^{r(G)}$ el producto directo de $r(G)$ círculos.

- ▶ $\pi_0 \text{Cob}^G = \frac{G}{[G, G]}$, $\pi_1 \text{Cob}^G = \mathbb{Z}^{r(G)}$.
- ▶ Donde $r(G) = r_1(G) + r_2(G) + \dots$, donde
- ▶ $r_n(G) = |\{(g_1, k_1), \dots, (g_n, k_n) : \prod_i [h_i, g_i] = 1\} / \sim|$.
- ▶ La identificación $\sim$ está dada por la acción de los difeomorfismos.

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	$Cyclic(Z_4), Z_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	Z_6 , symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	Z_8 , octic(D_8), quaternion(Q_8)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$Z_4 \times Z_2, Z_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	Z_9, Z_3^2	3,6	3,6	3,7
10	Z_{10} , dihedral(D_{10})	4,8	4,7	4,7+1
12	Z_{12} , tetrahedral(A_4), D_{12}	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $Z_2^2 \times Z_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	Z_{14}, D_{14}	4,10	4,9	4,9+1
15	Z_{15}	4	4	4
16	Z_{16} , Dic_4 , D_{16} , ($Q_8 \times Z_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$Z_8 \times Z_2, Z_4^2, Z_4 \times Z_2^2, Z_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$D_8 \times Z_2$	35	30	28+.
	$(Z_4 \times Z_2) \rtimes Z_2$	23	22	21+.
	$G_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$Q_8 \rtimes Z_2$	23	18	20+.
18	$Z_{18}, Z_3 \times Z_6, D_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2, \Sigma_3 \times Z_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$Z_{20}, Z_{10} \times Z_2, D_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$Z_{21}, Z_7 \rtimes Z_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	Z_{22}, D_{22}	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$Z_{24}, Z_2 \times Z_{12}, Z_2 \times Z_2 \times Z_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$D_8 \times Z_3, Q_8 \times Z_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$St(2,3), A_4 \times Z_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	Σ_4, D_{24}, Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$Z_2 \times Z_2 \times \Sigma_3, Z_2 \times (Z_3 \rtimes Z_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$Z_4 \times \Sigma_3, Z_3 \times Z_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(Z_6 \times Z_2) \rtimes Z_2$	30	22	22+
25	Z_{25}, Z_5^2	3,8	3,8	3,11
26	Z_{26}, D_{26}	4,16	4,15	4,15+.
27	$Z_{27}, Z_9 \times Z_3, Z_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
	$(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_3, Z_9 \rtimes Z_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$Z_{28}, Z_{14} \times Z_2, D_{28}, Dic_7$	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3,7
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral(A_4), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\text{St}(2,3)$, $A_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3,7
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\text{St}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

$$1. (g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1}),$$

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	$\text{Cyclic}(\mathbb{Z}_4), \mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic(D_8), quaternion(Q_8)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	$\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3,7
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral(D_{10})	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral(A_4), D_{12} Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
14	$\mathbb{Z}_{14}, \text{D}_{14}$	8,10	7,10	7+1,10
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4,10	4,9	4,9+1
16	$\mathbb{Z}_{16}, \text{Dic}_4, \text{D}_{16}, (\text{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2)$ $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4^2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_2^4$ Modular group of order 16 Quasihedral of order 16 $\text{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$ $\text{G}_{4,4}$ $\text{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	5,11,19,19 11,15,27,67 11 15 35 23 15 23	5,8,16,14 11,15,27,67 10 12 30 22 14 18	5,8+4+.,16+4+.,14+10+. 11,16,25,51 10+1 12+4+. 28+. 21+. 10+7+. 20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6, \text{D}_{18}$ $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2, \Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
20	$\mathbb{Z}_{20}, \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2, \text{D}_{20}$ Dic_5 , metacyclic	28,14	15,12	16+.,13+13
21	$\mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
22	$\mathbb{Z}_{22}, \text{D}_{22}$	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
24	$\mathbb{Z}_{24}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ $\text{D}_8 \times \mathbb{Z}_3, \text{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$ $\text{SU}(2,3), \text{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$ $\Sigma_4, \text{D}_{24}, \text{Dic}_6$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_3, \mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$ $\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$ $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	4,10 4,14 8,16,32 20,12 15,26 30,34,18 54,22 26,10 30	4,9 4,13 8,16,32 18,10 13,24 21,24,12 43,19 21,9 22	4,9+1 4,13+4+. 8,16,30 18+.,10+. 13+.,23+. 21+3+.,24+.,12+ 40+.,19+. 21+.,9+. 22+
25	$\mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}, \text{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3^3$ $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
28	$\mathbb{Z}_{28}, \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2, \text{D}_{28}, \text{Dic}_7$	19,10 6,10,28,12	18,9 6,10,25,11	22+.,10+. 6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3,7
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral(A_4), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\text{St}(2,3)$, $A_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	$Cyclic(Z_4), Z_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	Z_6 , symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	Z_8 , octic(D_8), quaternion(Q_8)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$Z_4 \times Z_2, Z_2^3$	8,16	8,16	8,15
9	Z_9, Z_3^2	3,6	3,6	3,7
10	Z_{10} , dihedral(D_{10})	4,8	4,7	4,7+1
12	Z_{12} , tetrahedral(A_4), D_{12} Dicyclic(Dic_3), $Z_2^2 \times Z_3$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
14	Z_{14}, D_{14}	8,10	7,10	7+1,10
15	Z_{15}	4,10	4,9	4,9+1
16	$Z_{16}, Dic_4, D_{16}, (Q_8 \times Z_2)$ $Z_8 \times Z_2, Z_4^2, Z_4 \times Z_2^2, Z_2^4$ Modular group of order 16 Quasihedral of order 16	5,11,19,19 11,15,27,67	5,8,16,14 11,15,27,67	5,8+4+.,16+4+.,14+10+ 11,16,25,51
	$D_8 \times Z_2$	11	10	10+1
	$(Z_4 \times Z_2) \rtimes Z_2$	15	12	12+4+.
	$G_{4,4}$	35	30	28+.
	$Q_8 \rtimes Z_2$	23	22	21+.
18	$Z_{18}, Z_3 \times Z_6, D_{18}$ $(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2, \Sigma_3 \times Z_3$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
20	$Z_{20}, Z_{10} \times Z_2, D_{20}$	28,14	15,12	16+.,13+13
	Dic_5 , metacyclic	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
21	$Z_{21}, Z_7 \rtimes Z_3$	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
22	Z_{22}, D_{22}	4,10	4,9	4,9+1
24	$Z_{24}, Z_2 \times Z_{12}, Z_2 \times Z_2 \times Z_6$ $D_8 \times Z_3, Q_8 \times Z_3$ $SI(2,3), A_4 \times Z_2$	4,14	4,13	4,13+4+.
	Σ_4, D_{24}, Dic_6	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$Z_2 \times Z_2 \times Z_3, Z_2 \times (Z_3 \rtimes Z_4)$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$Z_4 \times \Sigma_3, Z_3 \times Z_8$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$(Z_6 \times Z_2) \rtimes Z_2$	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
25	Z_{25}, Z_5^2	54,22	43,19	40+.,19+.
26	Z_{26}, D_{26}	26,10	21,9	21+.,9+.
27	$Z_{27}, Z_9 \times Z_3, Z_3^3$ $(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_3, Z_9 \rtimes Z_3$	30	22	22+
28	$Z_{28}, Z_{14} \times Z_2, D_{28}, Dic_7$	3,8	3,8	3,11
		4,16	4,15	4,15+.
		4,10,28	4,10,28	4,12,40
		19,10	18,9	22+.,10+.
		6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$), $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	4,10,16	4,9,5	4,9+1,5+1
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$, $\mathbb{Z}_3^3$	8,16	8,16	8,15
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	3,6	3,6	3,7
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$, Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	4,8	4,7	4,7+1
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
15	$\mathbb{Z}_{15}$	8,10	7,10	7+1,10
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$ Modular group of order 16 Quasihedral of order 16	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	4	4	4
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	11	10	10+1
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_{18}$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
20	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	6,10,22	6,10,19	6,10,19+.
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	10,14	9,12	9+1,12+3+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	4,14	4,13	4,13+4+.
	$\text{Sl}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	54,22	43,19	40+.,19+.
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	26,10	21,9	21+.,9+.
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	30	22	22+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	3,8	3,8	3,11
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,16	4,15	4,15+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	4,10,28	4,10,28	4,12,40
		19,10	18,9	22+.,10+.
		6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$), $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	8,16	8,16	8,15
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	3,6	3,6	3,7
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$, Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	4,8	4,7	4,7+1
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
15	$\mathbb{Z}_{15}$	8,10	7,10	7+1,10
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$ Modular group of order 16 Quasihedral of order 16	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	4	4	4
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	11	10	10+1
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	15	12	12+4+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	35	30	28+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	23	22	21+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
20	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	6,10,22	6,10,19	6,10,19+.
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	10,14	9,12	9+1,12+3+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	4,14	4,13	4,13+4+.
	$\text{Sl}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	54,22	43,19	40+.,19+.
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	26,10	21,9	21+.,9+.
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	30	22	22+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	3,8	3,8	3,11
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,16	4,15	4,15+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	4,10,28	4,10,28	4,12,40
		19,10	18,9	22+.,10+.
		6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

► $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$), $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	4,10,16	4,9,5	4,9+1,5+1
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	8,16	8,16	8,15
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	3,6	3,6	3,7
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$, Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	4,8	4,7	4,7+1
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
15	$\mathbb{Z}_{15}$	8,10	8,10	7+1,10
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$ Modular group of order 16 Quasihedral of order 16	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	4	4	4
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	11	10	10+1
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	15	12	12+4+.
	Dic_5 , metacyclic	35	30	28+.
	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3$	23	22	21+.
	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	28,14	15,12	16+.,13+13
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3$	6,10,22	6,10,19	6,10,19+.
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	10,14	9,12	9+1,12+3+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	4,10	4,9	4,9+1
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	4,14	4,13	4,13+4+.
	$\text{Sl}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4)$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	54,22	43,19	40+.,19+.
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	26,10	21,9	21+.,9+.
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	30	22	22+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	3,8	3,8	3,11
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,16	4,15	4,15+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	4,10,28	4,10,28	4,12,40
		19,10	18,9	22+.,10+.
		6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(\mathbb{G})$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATORS
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{D}_8$, quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4, 9, 5	4, 9+1, 5+1
9	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
10	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2^3$	3,6	3,6	3,7
12	$\mathbb{D}_{10}$	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral(A_4), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6, 9, 13	6, 9+1, 13+14+.
14	Dic_3 , $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7, 10	7+1, 10
15	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4, 9	4, 9+1
16	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5, 8, 16, 14	5, 8+4+., 16+4+., 3+4+1
16	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
16	Modular group of order 16	11	10	10+1
16	Quasihedral of order 16	15	12	12+4+.
16	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
16	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
16	$G_{4,4}$	15	14	10+7+.
16	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12, 12	6,14, 12+.
18	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+., 13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10, 19	6,10, 19+.
20	Dic_5 , metacyclic	10,14	9, 12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4, 13	4, 13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,30	8,16,30
24	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+., 10+.
24	$\text{Sl}(2,3)$, $A_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+., 23+.
24	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21, 24, 12	21+3+., 24+., 12+.
24	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+., 19+.
24	$\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+., 9+.
24	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+.
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4, 15	4, 15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,12,40	4,12,40
27	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+., 10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10, 25, 11	6,10, 25+., 11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3,5
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric(Σ_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{D}_8$, quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
9	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8,15
10	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_2^3$	3,6	3,6	3,7
12	$\mathbb{D}_{10}$	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral(A_4), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14,+
14	Dic_3 , $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
15	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
16	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4,+,16+4,+,3+1
18	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25,51
20	Modular group of order 16	11	10	10+1
20	Quasihedral of order 16	15	12	12+4,+
20	$\mathbb{D}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	35	30	28+,
20	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+,
20	$G_{4,4}$	15	14	10+7+,
20	$\mathbb{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	18	20+,
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+,-
20	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\Sigma_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+,-,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10,19+,-
21	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1,12+3+,-
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+,-
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
24	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+,-,10+,-
24	$\text{Sl}(2,3)$, $A_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+,-,23+,-
24	Σ_4 , $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21,24,13	21+3+,-,24+,-,12+,-
24	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+,-,19+,-
24	$\mathbb{Z}_4 \times \Sigma_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+,-,9+,-
24	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+,
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3,11
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+,-
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12,40
27	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+,-,10+,-
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+,-,11+,-

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,
- $r_1(D_{2n})$ y $r_1(\text{Dic}_n)$ es el número de subgrupos abelianos,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3, $\mathbb{5}$
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric($\mathbb{S}_3$)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8, $\mathbb{15}$
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3, $\mathbb{7}$
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic($\mathbb{Dic}_3$), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Dic}_4$, $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25, $\mathbb{51}$
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasidihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dicyclic, metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\mathbb{SL}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$\mathbb{S}_4$, $\mathbb{D}_{24}$, $\mathbb{Dic}_6$	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3, $\mathbb{11}$
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12, $\mathbb{30}$
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, $\mathbb{Dic}_7$	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $\mathbb{SL}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,
- $r_1(D_{2n})$ y $r_1(\mathbb{Dic}_n)$ es el número de subgrupos abelianos,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic($\mathbb{Z}_4$), $\mathbb{Z}_2^2$	3,5	3,5	3, $\mathbb{5}$
6	$\mathbb{Z}_6$, symmetric($\mathbb{S}_3$)	4,6	4,5	4,5+1
8	$\mathbb{Z}_8$, octic($\mathbb{D}_8$), quaternion($\mathbb{Q}_8$)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2^3$	8,16	8,16	8, $\mathbb{15}$
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3^2$	3,6	3,6	3, $\mathbb{7}$
10	$\mathbb{Z}_{10}$, dihedral($\mathbb{D}_{10}$)	4,8	4,7	4,7+1
12	$\mathbb{Z}_{12}$, tetrahedral($\mathbb{A}_4$), $\mathbb{D}_{12}$	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $\mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	$\mathbb{Z}_{14}$, $\mathbb{D}_{14}$	4,10	4,9	4,9+1
15	$\mathbb{Z}_{15}$	4	4	4
16	$\mathbb{Z}_{16}$, Dic_4 , $\mathbb{D}_{16}$, ($\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4^2$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$, $\mathbb{Z}_2^4$	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25, $\mathbb{51}$
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasidihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_2$	35	30	28+.
	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	23	22	21+.
	$\mathbb{G}_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2$	23	18	20+.
18	$\mathbb{Z}_{18}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{D}_{18}$	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	$\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{20}$	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dic_5 , metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	$\mathbb{Z}_{21}$, $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	$\mathbb{Z}_{22}$, $\mathbb{D}_{22}$	4,14	4,13	4,13+4+.
24	$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$\text{Sl}(2,3)$, $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	$\mathbb{S}_4$, $\mathbb{D}_{24}$, Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2$	30	22	22+
25	$\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}_5^2$	3,8	3,8	3, $\mathbb{11}$
26	$\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{D}_{26}$	4,16	4,15	4,15+.
27	$\mathbb{Z}_{27}$, $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3^3$	4,10,28	4,10,28	4,12, $\mathbb{30}$
	$(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \rtimes \mathbb{Z}_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	$\mathbb{Z}_{28}$, $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}_{28}$, Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $\text{Sl}(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,
- $r_1(D_{2n})$ y $r_1(\text{Dic}_n)$ es el número de subgrupos abelianos,
- $r(\mathbb{Z}_2^n) = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{3}$,

ORDERS	DESCRIPTION OF THE GROUPS	SUBGROUPS	ABE-SUBGROUPS	GENERATOR'S
4	Cyclic(Z_4), Z_2^2	3,5	3,5	3, $\boxed{5}$
6	Z_6 , symmetric(S_3)	4,6	4,5	4,5+1
8	Z_8 , octic(D_8), quaternion(Q_8)	4,10,6	4,9,5	4,9+1,5+1
	$Z_4 \times Z_2$, Z_2^3	8,16	8,16	8, $\boxed{15}$
9	Z_9 , Z_3^2	3,6	3,6	3, $\boxed{7}$
10	Z_{10} , dihedral(D_{10})	4,8	4,7	4,7+1
12	Z_{12} , tetrahedral(A_4), D_{12}	6,10,16	6,9,13	6,9+1,13+14+.
	Dicyclic(Dic_3), $Z_2^2 \times Z_3$	8,10	7,10	7+1,10
14	Z_{14} , D_{14}	4,10	4,9	4,9+1
15	Z_{15}	4	4	4
16	Z_{16} , Dic_4 , D_{16} , ($Q_8 \times Z_2$)	5,11,19,19	5,8,16,14	5,8+4+.,16+4+.,14+10+.
	$Z_8 \times Z_2$, Z_4^2 , $Z_4 \times Z_2^2$, Z_2^4	11,15,27,67	11,15,27,67	11,16,25, $\boxed{51}$
	Modular group of order 16	11	10	10+1
	Quasidihedral of order 16	15	12	12+4+.
	$D_8 \times Z_2$	35	30	28+.
	$(Z_4 \times Z_2) \rtimes Z_2$	23	22	21+.
	$G_{4,4}$	15	14	10+7+.
	$Q_8 \times Z_2$	23	18	20+.
18	Z_{18} , $Z_3 \times Z_6$, D_{18}	6,12,16	6,12,12	6,14,12+.
	$(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2$, $S_3 \times Z_3$	28,14	15,12	16+.,13+13
20	Z_{20} , $Z_{10} \times Z_2$, D_{20}	6,10,22	6,10,19	6,10.,19+.
	Dicyclic, metacyclic	10,14	9,12	9+1, 12+3+.
21	Z_{21} , $Z_7 \rtimes Z_3$	4,10	4,9	4,9+1
22	Z_{22} , D_{22}	4,14	4,13	4,13+4+.
24	Z_{24} , $Z_2 \times Z_{12}$, $Z_2 \times Z_2 \times Z_6$	8,16,32	8,16,32	8,16,30
	$D_8 \times Z_3$, $Q_8 \times Z_3$	20,12	18,10	18+.,10+.
	$Sl(2,3)$, $A_4 \times Z_2$	15,26	13,24	13+.,23+.
	S_4 , D_{24} , Dic_6	30,34,18	21,24,12	21+3+.,24+.,12+
	$Z_2 \times Z_2 \times S_3$, $Z_2 \times (Z_3 \times Z_4)$	54,22	43,19	40+.,19+.
	$Z_4 \times Z_3$, $Z_3 \rtimes Z_8$	26,10	21,9	21+.,9+.
	$(Z_6 \times Z_2) \rtimes Z_2$	30	22	22+
25	Z_{25} , Z_5^2	3,8	3,8	3, $\boxed{11}$
26	Z_{26} , D_{26}	4,16	4,15	4,15+.
27	Z_{27} , $Z_9 \times Z_3$, Z_3^3	4,10,28	4,10,28	4,12, $\boxed{30}$
	$(Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_3$, $Z_9 \rtimes Z_3$	19,10	18,9	22+.,10+.
28	Z_{28} , $Z_{14} \times Z_2$, D_{28} , Dic_7	6,10,28,12	6,10,25,11	6,10,25+.,11+.

La identificación $\sim$ está dada por:

- $(g, k) \sim (gkg^{-1}, g^{-1})$,
- $(g, k) \sim (g, hg^m)$ para $m \in \mathbb{Z}$,
- $(g, k)(g', k') \sim ([g, k]g', k')k'(g, k)k'^{-1}$, y
- $(g, k)(g', k') \sim k^{-1}(g', k')k(k^{-1}[k, g]kg, k)$.

Teorema

- $Sl(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre el conjunto $\{(g, k) : [k, g] = 1\}$, el cociente da $r_1(G)$,
- $r(\mathbb{Z}_n)$ es el número de subgrupos,
- $r_1(D_{2n})$ y $r_1(Dic_n)$ es el número de subgrupos abelianos,
- $r(\mathbb{Z}_2^n) = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{3}$,
- $r(\mathbb{Z}_p^n) = \frac{p^{2n-1}+p^{n+1}-p^{n-1}+p^2-p-1}{p^2-1}$

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web

OEIS
0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
: 12
23 10 22 11 21

A007581:

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web

OEIS
0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
23 12
10 22 11 21

A007581:

(1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web

OEIS
0 1 3 6 2 7
: 13
: 20
: 12
23 10 22 11 21

A007581:

- (1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.
- (2) Número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web



[A007581](#):

- (1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.
- (2) Número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .
- (3) El número de clases de isomorfismo de cuatro-cubrimientos regulares de una gráfica L con número de Betti $n = \beta(L)$ y con grupo de voltaje $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web



[A007581](#):

- (1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.
- (2) Número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .
- (3) El número de clases de isomorfismo de cuatro-cubrimientos regulares de una gráfica L con número de Betti $n = \beta(L)$ y con grupo de voltaje $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (4) La dimensión del álgebra centralizada $\text{End}_{H_1} \left(V_{10}^{\otimes k} \right)$ donde H_1 es un grupo de orden 96.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web



[A007581](#):

- (1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.
- (2) Número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .
- (3) El número de clases de isomorfismo de cuatro-cubrimientos regulares de una gráfica L con número de Betti $n = \beta(L)$ y con grupo de voltaje $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (4) La dimensión del álgebra centralizada $\text{End}_{H_1} \left(V_{10}^{\otimes k} \right)$ donde H_1 es un grupo de orden 96.
- (5) La dimensión del encaje universal del espacio polar dual.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

La sucesión 1, 2, 5, 15, 51, 187, 715, 2795, 11051, 43947, ...
con la forma:

$$g(n) = \frac{(2^n + 1)(2^{n-1} + 1)}{3},$$

la encontramos en la página web



[A007581](#):

- (1) La densidad de un lenguaje con cuatro letras.
- (2) Número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .
- (3) El número de clases de isomorfismo de cuatro-cubrimientos regulares de una gráfica L con número de Betti $n = \beta(L)$ y con grupo de voltaje $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- (4) La dimensión del álgebra centralizada $\text{End}_{H_1} \left(V_{10}^{\otimes k} \right)$ donde H_1 es un grupo de orden 96.
- (5) La dimensión del encaje universal del espacio polar dual.
- (6) El invariante de $\mathbb{Z}_2^n$ -cobordismo $r(G)$.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

Lenguajes

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

⋮
⋮
⋮

Lenguajes

Considere el siguiente juego: Formar palabras $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ con cuatro letras $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1.$$

Sea $L^n =$ el conjunto de palabras de longitud n .

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

⋮
⋮
⋮

Lenguajes

Considere el siguiente juego: Formar palabras $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ con cuatro letras $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1.$$

Sea $L^n =$ el conjunto de palabras de longitud n .

Ejemplos:

► $n = 2$ 2 palabras: 11, 12.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
.
.
.

Lenguajes

Considere el siguiente juego: Formar palabras $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ con cuatro letras $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1.$$

Sea $L^n =$ el conjunto de palabras de longitud n .

Ejemplos:

- ▶ $n = 2$ 2 palabras: 11, 12.
- ▶ $n = 3$ 5 palabras: 111, 112, 121, 122, 123.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

⋮

Lenguajes

Considere el siguiente juego: Formar palabras $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ con cuatro letras $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1.$$

Sea $L^n =$ el conjunto de palabras de longitud n .

Ejemplos:

- ▶ $n = 2$ 2 palabras: 11, 12.
- ▶ $n = 3$ 5 palabras: 111, 112, 121, 122, 123.
- ▶ $n = 4$ 15 palabras: 1111 1112 1121 1122 1123
1211 1212 1213 1221 1222
1223 1231 1232 1233 1234.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

Lenguajes

Considere el siguiente juego: Formar palabras $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ con cuatro letras $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1.$$

Sea L^n = el conjunto de palabras de longitud n .

Ejemplos:

- ▶ $n = 2$ 2 palabras: 11, 12.
- ▶ $n = 3$ 5 palabras: 111, 112, 121, 122, 123.
- ▶ $n = 4$ 15 palabras: 1111 1112 1121 1122 1123
1211 1212 1213 1221 1222
1223 1231 1232 1233 1234.

N. Moreira and R. Reis 2005

Densidad de un lenguaje con cuatro letras en grado n denotado por $|L^n|$.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

Gráficas de Hanoi

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
.
.
.

Gráficas de Hanoi

Considere la torre de Hanoi con m palitos y n discos.

H_m^n = gráfica de los estados distintos de la torre,

- ▶ vertices = estados de la torre, con etiquetas $a_1 a_2 \cdots a_n$ donde a_i = la posición del disco i .
- ▶ aristas = movimientos de Hanoi.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

⋮

Gráficas de Hanoi

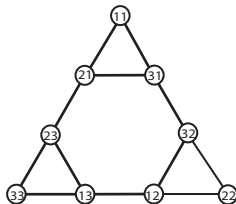
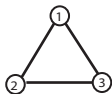
Considere la torre de Hanoi con m palitos y n discos.

H_m^n = gráfica de los estados distintos de la torre,

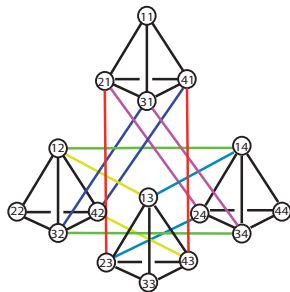
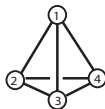
- ▶ vertices = estados de la torre, con etiquetas $a_1 a_2 \cdots a_n$ donde a_i = la posición del disco i .
- ▶ aristas = movimientos de Hanoi.

Ejemplos.

H_3^1 y H_3^2



H_4^1 y H_4^2



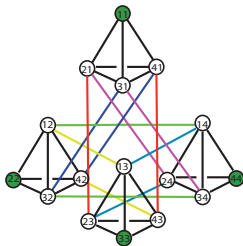
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

⋮
⋮

Las clases no-equivalentes son el cociente por la acción del grupo de permutación Σ_m con m palos .

Ejemplos.

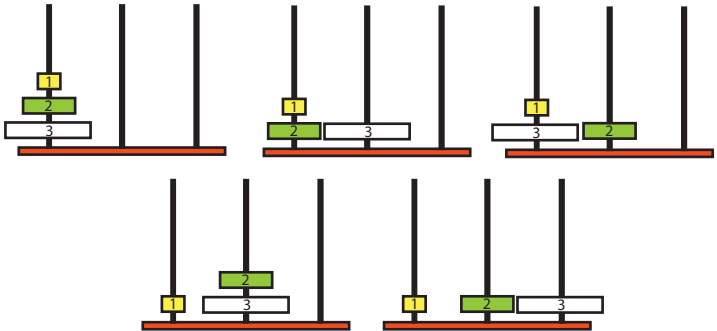
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:



- Para 3 discos representantes de las clases son

111, 112, 121, 122, 123

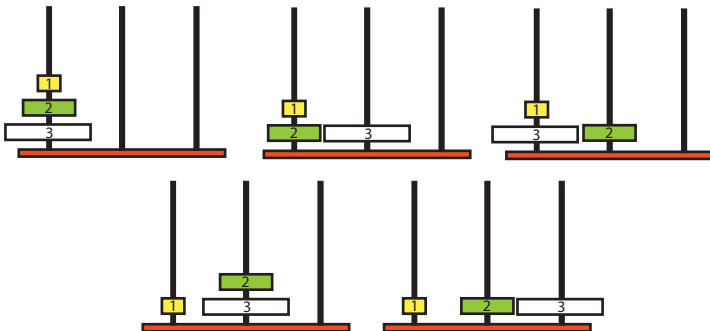
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:



- Para 3 discos representantes de las clases son

111, 112, 121, 122, 123

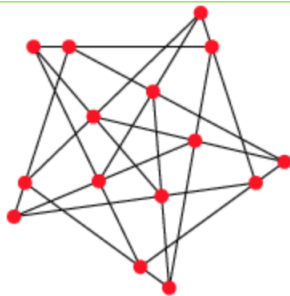
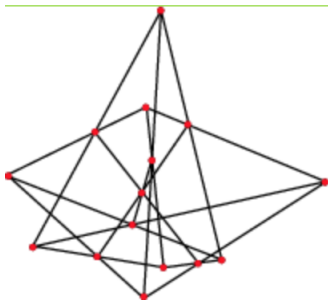
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:



- Para 4 discos hay 15 clases.

Spazio Polar Dual

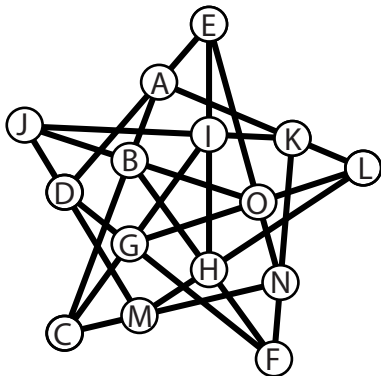
- ▶ *On the Figure of Six Points in Space of Four Dimensions*,
H. W. Richmond, (1900)
- ▶ *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*,
L. Cremona, (1877)



1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

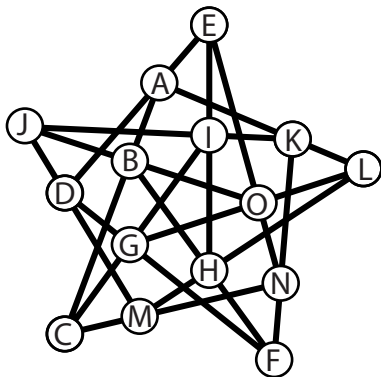
⋮
⋮

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

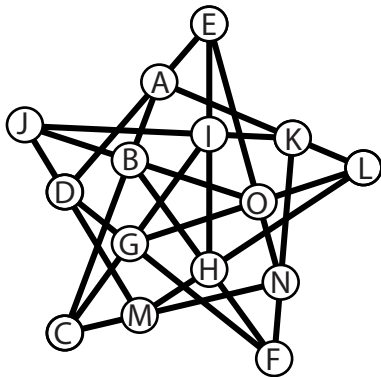


Configuración de Cremona-Richmond

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

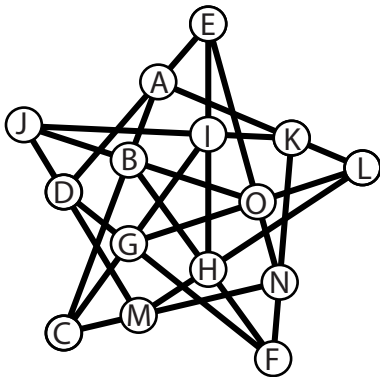


1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:



El mínimo número de puntos necesarios para marcar todos los puntos con la regla de que si tenemos dos puntos marcados de una línea entonces obtenemos el tercero.

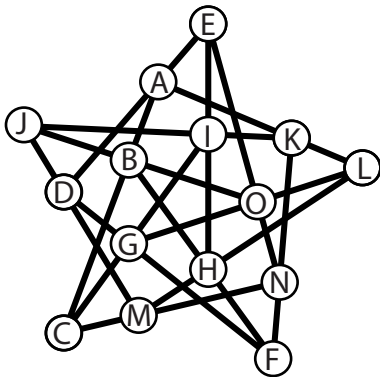
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947



El mínimo número de puntos necesarios para marcar todos los puntos con la regla de que si tenemos dos puntos marcados de una línea entonces obtenemos el tercero.

► para $n = 0$ la configuración es un punto,

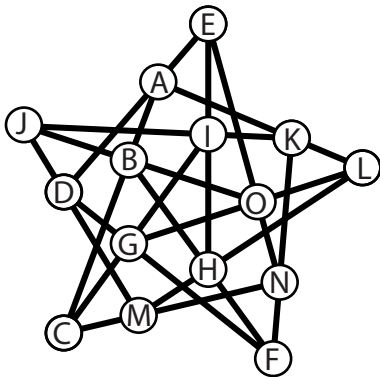
...



El mínimo número de puntos necesarios para marcar todos los puntos con la regla de que si tenemos dos puntos marcados de una línea entonces obtenemos el tercero.

- ▶ para $n = 0$ la configuración es un punto,
- ▶ para $n = 1$ la configuración es una línea con tres puntos,

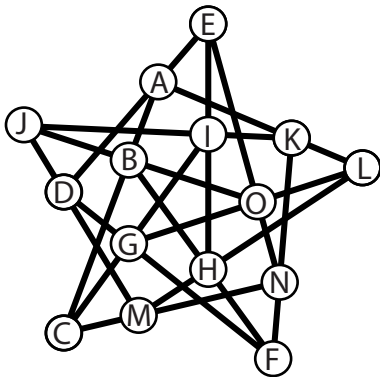
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947



El mínimo número de puntos necesarios para marcar todos los puntos con la regla de que si tenemos dos puntos marcados de una línea entonces obtenemos el tercero.

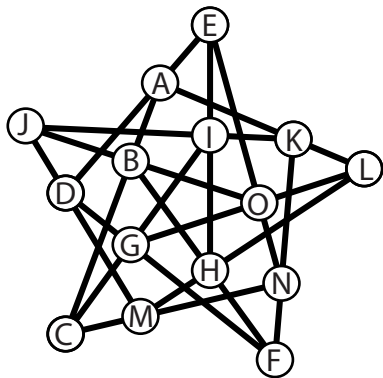
- ▶ para $n = 0$ la configuración es un punto,
- ▶ para $n = 1$ la configuración es una línea con tres puntos,
- ▶ para $n = 2$ tenemos la configuración de Cremona-Richmond,

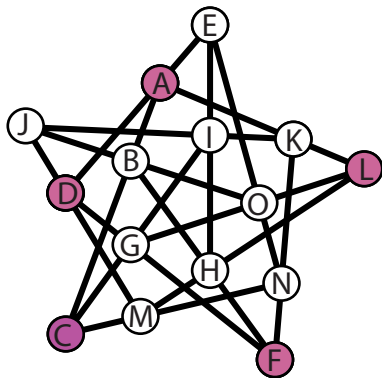
1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947

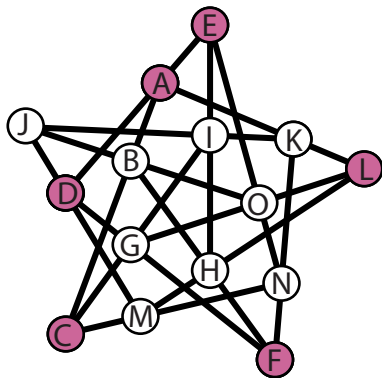


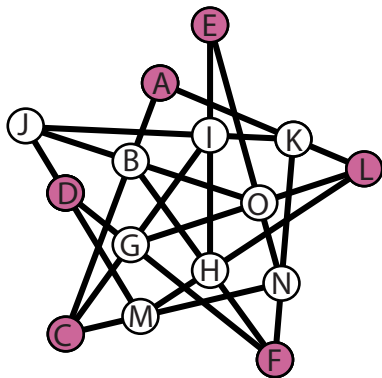
El mínimo número de puntos necesarios para marcar todos los puntos con la regla de que si tenemos dos puntos marcados de una línea entonces obtenemos el tercero.

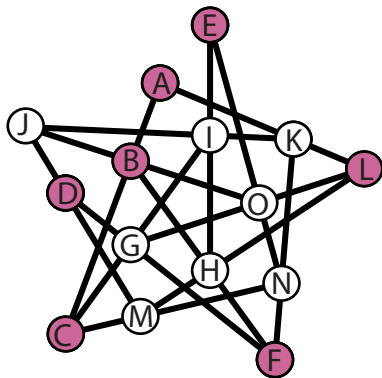
- ▶ para $n = 0$ la configuración es un punto,
- ▶ para $n = 1$ la configuración es una línea con tres puntos,
- ▶ para $n = 2$ tenemos la configuración de Cremona-Richmond,
- ▶ para $n = 3$ la configuración tiene 135 puntos y 315 líneas,

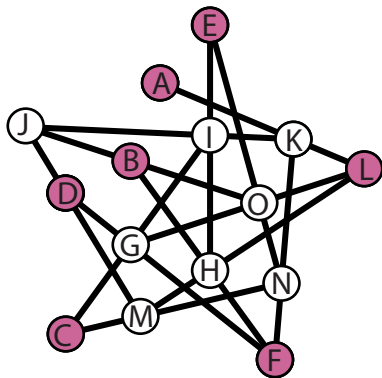


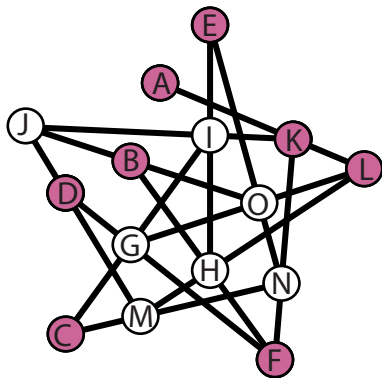


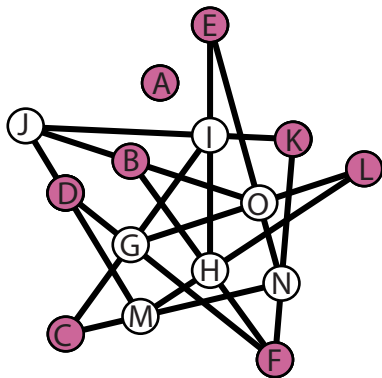


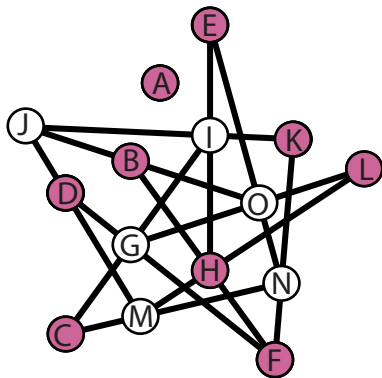


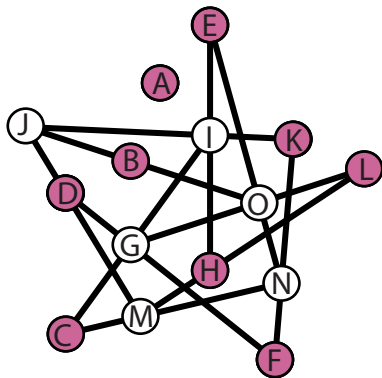


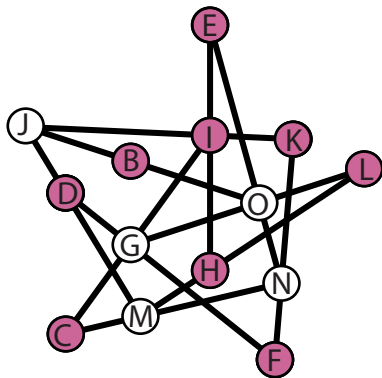


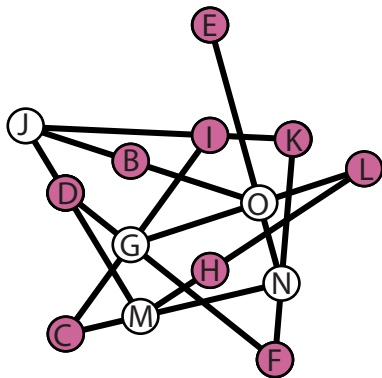


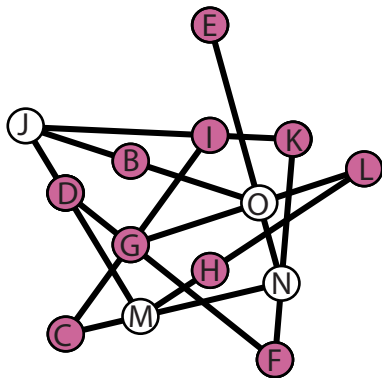


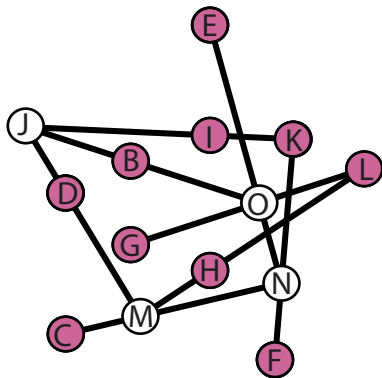


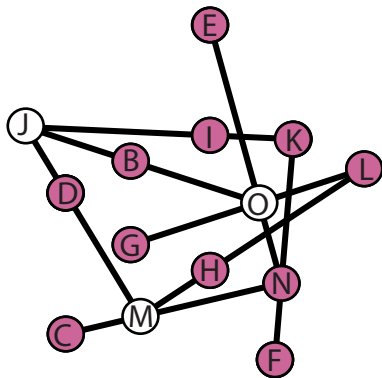


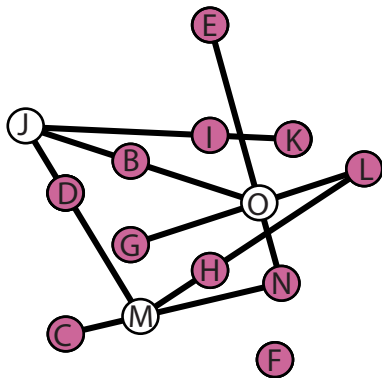


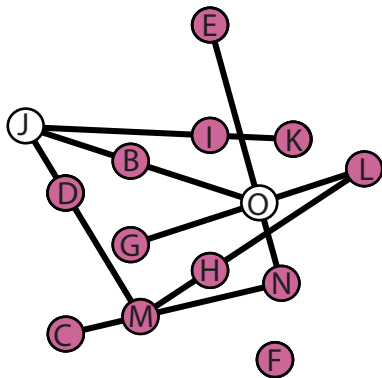


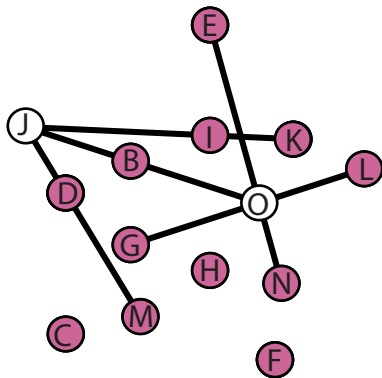


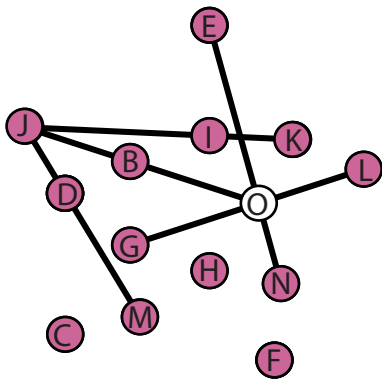


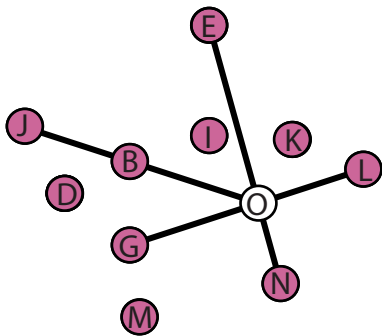


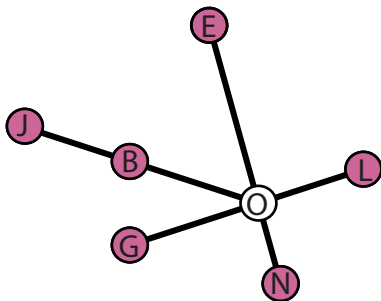


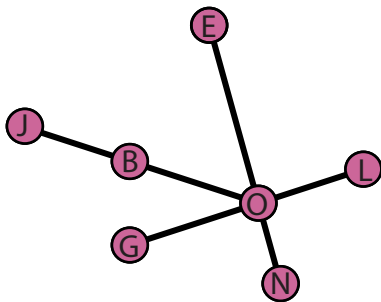


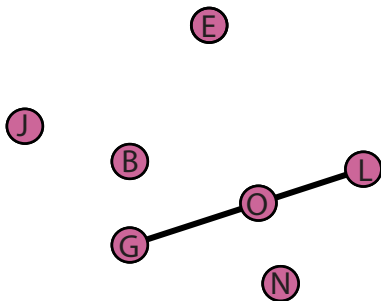


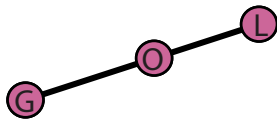




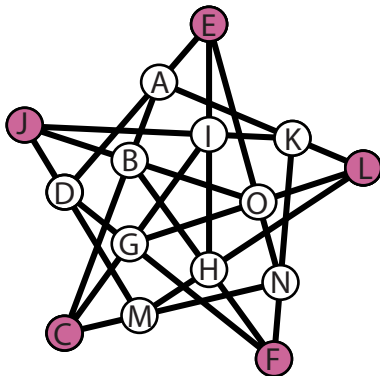








Contra-ejemplo



Espacios polares duales

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

lineas $\mathcal{L}_n = \{ \text{los subesp. tot. isotrópicos de dimensión } n-1 \}$

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

lineas $\mathcal{L}_n = \{ \text{los subesp. tot. isotrópicos de dimensión } n-1 \}$

- Todos los subespacios totalmente isotrópicos maximales tienen la misma dimensión igual a n .

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

lineas $\mathcal{L}_n = \{ \text{los subesp. tot. isotrópicos de dimensión } n-1 \}$

- ▶ Todos los subespacios totalmente isotrópicos maximales tienen la misma dimensión igual a n .
- ▶ La incidencia está dada por la inclusión.

Espacios polares duales

Considere un espacio simpléctico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

lineas $\mathcal{L}_n = \{ \text{los subesp. tot. isotrópicos de dimensión } n-1 \}$

- ▶ Todos los subespacios totalmente isotrópicos maximales tienen la misma dimensión igual a n .
- ▶ La incidencia está dada por la inclusión.
- ▶ Cada linea tiene exáctamente tres puntos.

Espacios polares duales

Considere un espacio simplectico sobre $\mathbb{F}_2$ de dimensión $2n$.

$$\langle v, w \rangle := vJw^t \text{ with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio parcialmente lineal $\mathcal{G}_n = (\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_n)$:

puntos $\mathcal{P}_n = \{ \text{los subespacios totalmente isotrópicos maximales} \}$

lineas $\mathcal{L}_n = \{ \text{los subesp. tot. isotrópicos de dimensión } n-1 \}$

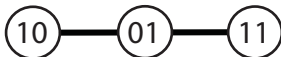
- ▶ Todos los subespacios totalmente isotrópicos maximales tienen la misma dimensión igual a n .
- ▶ La incidencia está dada por la inclusión.
- ▶ Cada linea tiene exactamente tres puntos.
- ▶ Hay un mapa lineal $\theta : \mathbb{F}_2(\mathcal{L}_n) \longrightarrow \mathbb{F}_2(\mathcal{P}_n)$ dado por $\{p, q, r\} \longmapsto p + q + r$.

La dimensión del encaje universal del espacio polar dual, se denota por $\dim U(\mathcal{G}_n)$ en grado n , es la dimensión del cociente $\mathbb{F}_2(\mathcal{P}_n)/\text{Im}(\theta)$.

La dimensión del encaje universal del espacio polar dual, se denota por $\dim U(\mathcal{G}_n)$ en grado n , es la dimensión del cociente $\mathbb{F}_2(\mathcal{P}_n)/\text{Im}(\theta)$.

Ejemplos:

Para $n = 1$, $\mathcal{P}_1 = \{10, 01, 11\}$ y $\mathcal{L}_1 = \{0\}$.



Entonces

$$\dim U(\mathcal{G}_1) = 2.$$

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0010 \\ 0100 \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} 0010 \\ 0101 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} 0101 \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} 0011 \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} 0011 \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $\mathcal{L}_2$ es

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} \mathbf{0001} \\ 0010 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} \mathbf{0001} \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} \mathbf{0001} \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0010 \\ 0100 \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} 0010 \\ 0101 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} 0101 \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} 0011 \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} 0011 \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $\mathcal{L}_2$ es

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} \mathbf{0001} \\ \mathbf{0010} \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0010 \\ 0100 \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} 0010 \\ 0101 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} 0101 \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} \mathbf{0011} \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} \mathbf{0011} \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $\mathcal{L}_2$ es

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} 0001 \\ \mathbf{0010} \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} \mathbf{0010} \\ 0100 \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} \mathbf{0010} \\ 0101 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} 0101 \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} 0011 \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} 0011 \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $\mathcal{L}_2$ es

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0010 \\ \mathbf{0100} \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} 0010 \\ 0101 \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} \mathbf{0100} \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} \mathbf{0100} \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} 0101 \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} 0011 \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} 0011 \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $\mathcal{L}_2$ es

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Ejemplos:

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2$ es

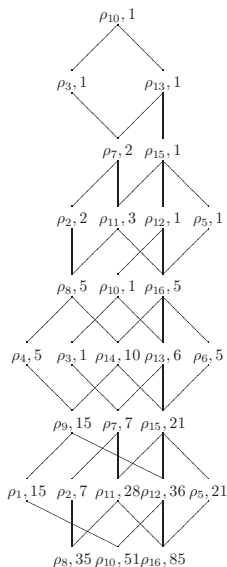
$$\begin{array}{lll} A \begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \end{pmatrix} & B \begin{pmatrix} 0001 \\ 1000 \end{pmatrix} & C \begin{pmatrix} 0001 \\ 1010 \end{pmatrix} & D \begin{pmatrix} 0010 \\ 0100 \end{pmatrix} & E \begin{pmatrix} 0010 \\ \mathbf{0101} \end{pmatrix} \\ F \begin{pmatrix} 0100 \\ 1000 \end{pmatrix} & G \begin{pmatrix} 0100 \\ 1010 \end{pmatrix} & H \begin{pmatrix} \mathbf{0101} \\ 1000 \end{pmatrix} & I \begin{pmatrix} \mathbf{0101} \\ 1010 \end{pmatrix} & J \begin{pmatrix} 0110 \\ 1001 \end{pmatrix} \\ K \begin{pmatrix} 0011 \\ 1100 \end{pmatrix} & L \begin{pmatrix} 0011 \\ 1101 \end{pmatrix} & M \begin{pmatrix} 0110 \\ 1011 \end{pmatrix} & N \begin{pmatrix} 0111 \\ 1011 \end{pmatrix} & O \begin{pmatrix} 0111 \\ 1001 \end{pmatrix} \end{array}$$

and $\mathcal{L}_2$ is

A-B-C	J-D-M	C-M-N
A-K-L	E-O-N	F-N-K
D-A-E	B-H-F	M-H-L
D-G-F	J-B-O	G-O-L
E-I-H	C-G-I	J-I-K

Diagrama de Hasse

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947



$$1^2 = \mathbf{1}$$

$$1^2 + 1^2 = \mathbf{2}$$

$$2^2 + 1^2 = \mathbf{5}$$

$$2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 = \mathbf{15}$$

$$5^2 + 1^2 + 5^2 = \mathbf{51}$$

$$5^2 + 1^2 + 10^2 + 6^2 + 5^2 = \mathbf{187}$$

$$15^2 + 7^2 + 21^2 = \mathbf{715}$$

$$15^2 + 7^2 + 28^2 + 36^2 + 21^2 = \mathbf{2795}$$

$$35^2 + 51^2 + 85^2 = \mathbf{11051}$$

Sea H_1 el subgrupo de U_2 generado

$$T = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Sea ρ_{10} la representación natural la cual está dada por mandar D y T a sus matrices correspondientes.

Sea H_1 el subgrupo de U_2 generado

$$T = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Sea ρ_{10} la representación natural la cual está dada por mandar D y T a sus matrices correspondientes.

Tomamos el diagrama de Hasse de la descomposición de $(\rho_{10}^n, V_{10}^{\otimes n})$ en representaciones irreducibles.

Sea H_1 el subgrupo de U_2 generado

$$T = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Sea ρ_{10} la representación natural la cual está dada por mandar D y T a sus matrices correspondientes.

Tomamos el diagrama de Hasse de la descomposición de $(\rho_{10}^n, V_{10}^{\otimes n})$ en representaciones irreducibles.

El algebra centralizada de H_1 en $V_{10}^{\otimes n}$, donde H_1 actúa diagonalmente es

$$\text{End}_{H_1}(V_{10}^{\otimes n}) := \{f : V_{10}^{\otimes n} \longrightarrow V_{10}^{\otimes n} : H_1 - \text{mapas lineales}\}$$

luego $f(h \cdot v) = h \cdot f(v)$.

Sea H_1 el subgrupo de U_2 generado

$$T = \frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Sea ρ_{10} la representación natural la cual está dada por mandar D y T a sus matrices correspondientes.

Tomamos el diagrama de Hasse de la descomposición de $(\rho_{10}^n, V_{10}^{\otimes n})$ en representaciones irreducibles.

El algebra centralizada de H_1 en $V_{10}^{\otimes n}$, donde H_1 actúa diagonalmente es

$$\text{End}_{H_1}(V_{10}^{\otimes n}) := \{f : V_{10}^{\otimes n} \longrightarrow V_{10}^{\otimes n} : H_1 - \text{mapas lineales}\}$$

luego $f(h \cdot v) = h \cdot f(v)$.

La dimensión del álgebra $\text{End}_{H_1}(V_{10}^{\otimes n})$ da el valor de la sucesión.

Cubrimientos de gráficas

Cubrimientos de gráficas

Tomemos $\Gamma = (V(\Gamma), D(\Gamma))$ una gráfica (dirigida) donde $V(\Gamma)$ son los vértices y $D(\Gamma)$ las aristas.

Cubrimientos de gráficas

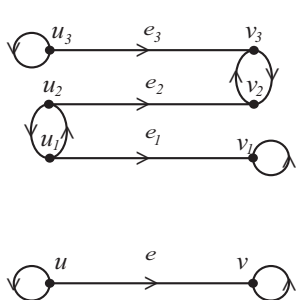
Tomemos $\Gamma = (V(\Gamma), D(\Gamma))$ una gráfica (dirigida) donde $V(\Gamma)$ son los vértices y $D(\Gamma)$ las aristas. Un mapa sobreyectivo $p : K \longrightarrow \Gamma$ es un cubrimiento si la restricción $p|_{N(\tilde{v})} : N(\tilde{v}) \longrightarrow N(v)$ es una biyección para todo v y $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$.

Cubrimientos de gráficas

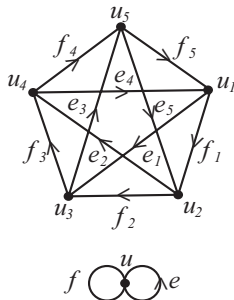
Tomemos $\Gamma = (V(\Gamma), D(\Gamma))$ una gráfica (dirigida) donde $V(\Gamma)$ son los vértices y $D(\Gamma)$ las aristas. Un mapa sobreyectivo $p : K \longrightarrow \Gamma$ es un cubrimiento si la restricción $p|_{N(\tilde{v})} : N(\tilde{v}) \longrightarrow N(v)$ es una biyección para todo v y $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$. Donde $N(v)$ es la vecindad de v , i.e. el conjunto de vértices adyacentes a v .

Cubrimientos de gráficas

Tomemos $\Gamma = (V(\Gamma), D(\Gamma))$ una gráfica (dirigida) donde $V(\Gamma)$ son los vértices y $D(\Gamma)$ las aristas. Un mapa sobreyectivo $p : K \longrightarrow \Gamma$ es un cubrimiento si la restricción $p|_{N(\tilde{v})} : N(\tilde{v}) \longrightarrow N(v)$ es una biyección para todo v y $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$. Donde $N(v)$ es la vecindad de v , i.e. el conjunto de vértices adjacentes a v .



K
↓
 L



K_5
↓
 B_1

- K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;

- ▶ K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;
- ▶ un cubrimiento $p : K \longrightarrow \Gamma$ es regular si $\text{Cov}(p)$ actúa transitivamente en cada fibra, donde $\text{Cov}(p)$ son los elementos $\Phi \in \text{Aut}(K)$ tal que $p = p\Phi$.

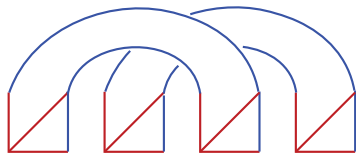
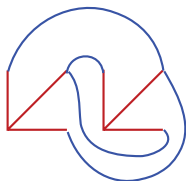
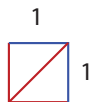
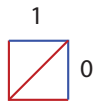
- ▶ K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;
- ▶ un cubrimiento $p : K \longrightarrow \Gamma$ es regular si $\text{Cov}(p)$ actúa transitivamente en cada fibra, donde $\text{Cov}(p)$ son los elementos $\Phi \in \text{Aut}(K)$ tal que $p = p\Phi$.
- ▶ Un cubrimiento es regular si y sólo si el orden de $\text{Cov}(p)$ coincide con el número de hojas del cubrimiento.

- ▶ K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;
- ▶ un cubrimiento $p : K \longrightarrow \Gamma$ es regular si $\text{Cov}(p)$ actúa transitivamente en cada fibra, donde $\text{Cov}(p)$ son los elementos $\Phi \in \text{Aut}(K)$ tal que $p = p\Phi$.
- ▶ Un cubrimiento es regular si y sólo si el orden de $\text{Cov}(p)$ coincide con el número de hojas del cubrimiento.
- ▶ dos cubrimientos de gráficas $p_1 : K_1 \longrightarrow \Gamma$ y $p_2 : K_2 \longrightarrow \Gamma$ son isomorfos si existe un isomorfismo de gráficas $\Phi : K_1 \longrightarrow K_2$ tal que $p_1 = p_2\Phi$.

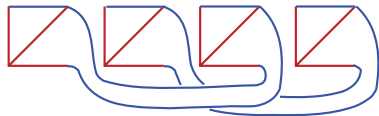
- ▶ K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;
- ▶ un cubrimiento $p : K \longrightarrow \Gamma$ es regular si $\text{Cov}(p)$ actúa transitivamente en cada fibra, donde $\text{Cov}(p)$ son los elementos $\Phi \in \text{Aut}(K)$ tal que $p = p\Phi$.
- ▶ Un cubrimiento es regular si y sólo si el orden de $\text{Cov}(p)$ coincide con el número de hojas del cubrimiento.
- ▶ dos cubrimientos de gráficas $p_1 : K_1 \longrightarrow \Gamma$ y $p_2 : K_2 \longrightarrow \Gamma$ son isomorfos si existe un isomorfismo de gráficas $\Phi : K_1 \longrightarrow K_2$ tal que $p_1 = p_2\Phi$.
- ▶ cada cubrimiento regular de una gráfica Γ se puede construir mediante un mapa voltaje $\phi : D(\Gamma) \longrightarrow G$ con G un grupo finito llamado grupo voltaje (Gross and Tucker);

- ▶ K es un n -cubrimiento de Γ si la proyección es n a 1;
- ▶ un cubrimiento $p : K \longrightarrow \Gamma$ es regular si $\text{Cov}(p)$ actúa transitivamente en cada fibra, donde $\text{Cov}(p)$ son los elementos $\Phi \in \text{Aut}(K)$ tal que $p = p\Phi$.
- ▶ Un cubrimiento es regular si y sólo si el orden de $\text{Cov}(p)$ coincide con el número de hojas del cubrimiento.
- ▶ dos cubrimientos de gráficas $p_1 : K_1 \longrightarrow \Gamma$ y $p_2 : K_2 \longrightarrow \Gamma$ son isomorfos si existe un isomorfismo de gráficas $\Phi : K_1 \longrightarrow K_2$ tal que $p_1 = p_2\Phi$.
- ▶ cada cubrimiento regular de una gráfica Γ se puede construir mediante un mapa voltaje $\phi : D(\Gamma) \longrightarrow G$ con G un grupo finito llamado grupo voltaje (Gross and Tucker);
- ▶ Un mapa voltaje tiene una gráfica asociada, llamada gráfica voltaje, la cual denotaremos $\Gamma \times_\phi G$ and which vertex set is $V(\Gamma) \times G$ and an edge joins a vertex (u, g) to $(v, \phi(uv)g)$.

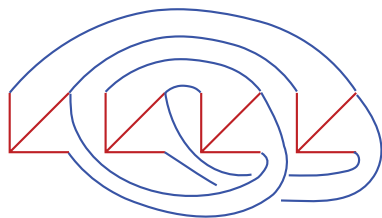
0 1



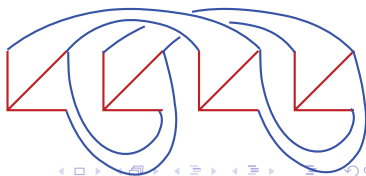
NO ISO



NO ISO



ISO
(243)



1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
.
.
.

Para $G = \mathbb{F}_p^r$ el espacio vectorial de dimensión r sobre $\mathbb{F}_p$, con p un número primo.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
.
.

Para $G = \mathbb{F}_p^r$ el espacio vectorial de dimensión r sobre $\mathbb{F}_p$, con p un número primo.

Sea $\text{Isom}(L, \mathbb{F}_p^r)$ el conjunto de clases de isomorfismo de cubrimientos regulares con grupo voltaje $\mathbb{F}_p^r$.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
.
.

Para $G = \mathbb{F}_p^r$ el espacio vectorial de dimensión r sobre $\mathbb{F}_p$, con p un número primo.

Sea $\text{Isom}(L, \mathbb{F}_p^r)$ el conjunto de clases de isomorfismo de cubrimientos regulares con grupo voltaje $\mathbb{F}_p^r$. Se tiene

$$\text{Isom}(\Gamma, \mathbb{F}_p^r) \cong (\mathbb{F}_p^r)^{\beta(\Gamma)} / \text{Gl}_r(\mathbb{F}_p).$$

donde $\beta(\Gamma) = |D(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1$ es el número de Betti Γ y $\text{Gl}_r(\mathbb{F}_p)$ el grupo general lineal.

1
2
5
15
51
187
715
2795
11051
43947
:
:

Para $G = \mathbb{F}_p^r$ el espacio vectorial de dimensión r sobre $\mathbb{F}_p$, con p un número primo.

Sea $\text{Isom}(L, \mathbb{F}_p^r)$ el conjunto de clases de isomorfismo de cubrimientos regulares con grupo voltaje $\mathbb{F}_p^r$. Se tiene

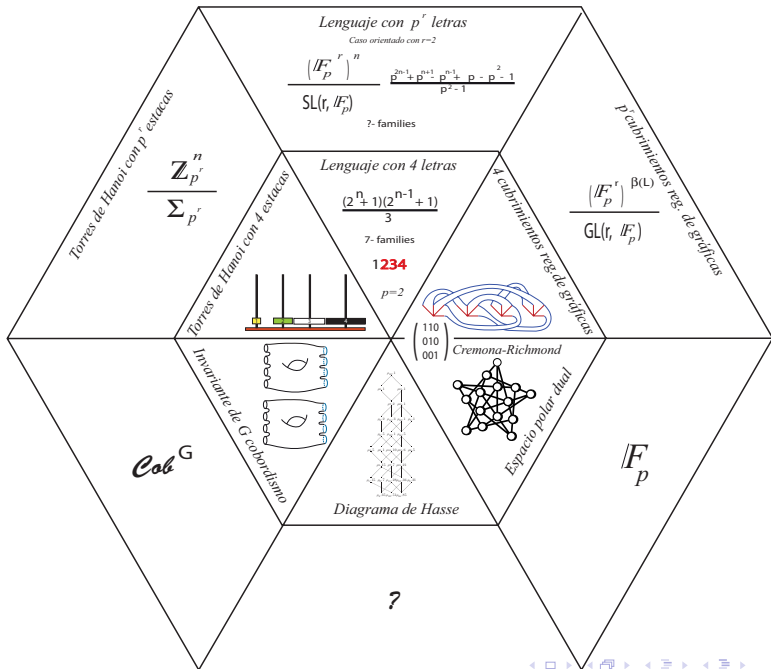
$$\text{Isom}(\Gamma, \mathbb{F}_p^r) \cong (\mathbb{F}_p^r)^{\beta(\Gamma)} / \text{Gl}_r(\mathbb{F}_p).$$

donde $\beta(\Gamma) = |D(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1$ es el número de Betti Γ y $\text{Gl}_r(\mathbb{F}_p)$ el grupo general lineal.

Consideraremos $p = 2$ y $r = 2$, la cardinalidad del conjunto de clases de isomorfismo $\text{Isom}(\Gamma, \mathbb{F}_2^2)$ da la sucesión con $\beta(\Gamma) = 1, 2, \dots$

•
•
•

 $(0, 0)$  $(0, 0)$  $(1, 0)$  $(0,0)$  $(0, 0)$  $(1, 0)$  $(1, 0)$  $(1, 0)$  $(1, 1)$  $(1, 0)$ 

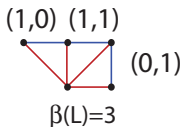


Equivalencia entre las interpretaciones de la sucesión

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

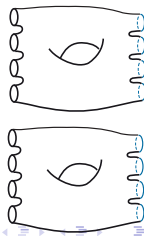
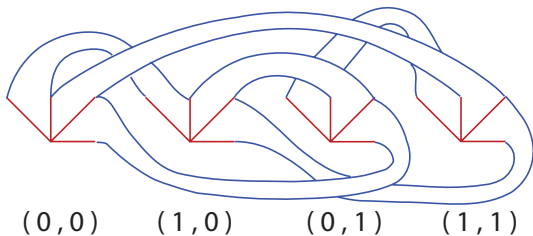
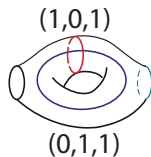
Coverings

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Cobordisms

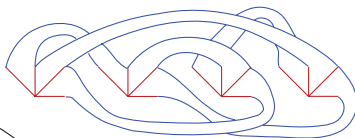
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Languages

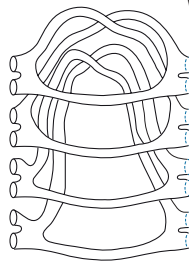
Fourcoverings

234



$$\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 01 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$$



Dual polar space

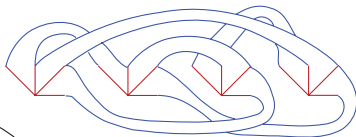
Cobordism

Languages

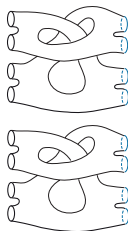
234

$$\begin{pmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$$

Fourcoverings



$$\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 01 \end{pmatrix}$$



Dual polar space

Cobordism

Lenguajes

Lenguajes

El algoritmo de la división da una biyección

$$\phi : \mathbb{Z}_{p^r} \longrightarrow \mathbb{F}_p^r .$$

de la forma $a \longrightarrow (u_0, u_1, \dots, u_{r-1})^t$ donde a se escribe de manera única $u_0 + u_1p + \dots + u_{r-1}p^{r-1}$.

El algoritmo de la división da una biyección

$$\phi : \mathbb{Z}_{p^r} \longrightarrow \mathbb{F}_p^r .$$

de la forma $a \longrightarrow (u_0, u_1, \dots, u_{r-1})^t$ donde a se escribe de manera única $u_0 + u_1p + \dots + u_{r-1}p^{r-1}$.

Así palabras de longitud n con letras en $\mathbb{Z}_{p^r}$ las podemos ver como matrices $r \times n$ y su descomposición de Bruhat tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.
- ▶ las palabras $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ tienen enteros $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1}$ con las reglas

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.
- ▶ las palabras $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ tienen enteros $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1}$ con las reglas
(R1) $a_i = 0$ para $i < k_0$;

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.
- ▶ las palabras $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ tienen enteros $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1}$ con las reglas
 - (R1) $a_i = 0$ para $i < k_0$;
 - (R2) $a_{k_i} = p^i$ para toda k_i ;

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.
- ▶ las palabras $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ tienen enteros $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1}$ con las reglas
 - (R1) $a_i = 0$ para $i < k_0$;
 - (R2) $a_{k_i} = p^i$ para toda k_i ;
 - (R3) $a_j \in \{0, 1, \dots, p^l - 1\}$ para $k_{l-1} < j < k_l$.

Lenguaje:

- ▶ letras $\{0, \dots, p^r - 1\}$, con p primo y r un entero positivo.
- ▶ las palabras $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ tienen enteros $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{r-1}$ con las reglas
 - (R1) $a_i = 0$ para $i < k_0$;
 - (R2) $a_{k_i} = p^i$ para toda k_i ;
 - (R3) $a_j \in \{0, 1, \dots, p^l - 1\}$ para $k_{l-1} < j < k_l$.

De esta forma el lenguaje está definido por un cociente

$$\mathbb{Z}_{p^r}^n / \text{GL}(r, \mathbb{F}_p)$$

Torres de Hanoi

Torres de Hanoi

Recordemos L^n eran las palabras de longitud n con letras 1, 2, 3, 4 satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1$$

Torres de Hanoi

Recordemos L^n eran las palabras de longitud n con letras 1, 2, 3, 4 satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1$$

Tenemos

$L^n \subset T^n :=$ todas las palabras de 4 letras y longitud n

Torres de Hanoi

Recordemos L^n eran las palabras de longitud n con letras 1, 2, 3, 4 satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1$$

Tenemos

$$L^n \subset T^n := \text{todas las palabras de 4 letras y longitud } n$$

El grupo de permutaciones Σ_4 actúa en T^n y existe una biyección canónica

$$T^n / \Sigma_4 \longrightarrow L^n$$

Torres de Hanoi

Recordemos L^n eran las palabras de longitud n con letras 1, 2, 3, 4 satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1$$

Tenemos

$$L^n \subset T^n := \text{todas las palabras de 4 letras y longitud } n$$

El grupo de permutaciones Σ_4 actúa en T^n y existe una biyección canónica

$$T^n / \Sigma_4 \longrightarrow L^n$$

la ejemplificamos

$$334224311 \overset{(31)}{\rightsquigarrow} 114224133 \overset{(42)}{\rightsquigarrow} 112442133 \overset{(43)}{\rightsquigarrow} 112332144$$

Torres de Hanoi

Recordemos L^n eran las palabras de longitud n con letras 1, 2, 3, 4 satisfaciendo

$$0 < a_i \leq \max_{j < i} \{a_j\} + 1$$

Tenemos

$$L^n \subset T^n := \text{todas las palabras de 4 letras y longitud } n$$

El grupo de permutaciones Σ_4 actúa en T^n y existe una biyección canónica

$$T^n / \Sigma_4 \longrightarrow L^n$$

la ejemplificamos

$$334224311 \overset{(31)}{\rightsquigarrow} 114224133 \overset{(42)}{\rightsquigarrow} 112442133 \overset{(43)}{\rightsquigarrow} 112332144$$

De esta forma de una tenemos el número de estados no-equivalentes de una gráfica de Hanoi H_4^n .

Espacio polar dual

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad.

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad. Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k .

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad. Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k . Se tienen las propiedades:

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad.

Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k . Se tienen las propiedades:

- ▶ $Y \in \Gamma_k$ si y sólo si $\dim(X_0 \cap Y) = n - k$,

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad.

Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k . Se tienen las propiedades:

- ▶ $Y \in \Gamma_k$ si y sólo si $\dim(X_0 \cap Y) = n - k$,
- ▶ cada línea de $\mathcal{L}_n$ contiene dos elementos de Γ_k y un elemento de Γ_{k-1} , para algún k .

Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad.

Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k . Se tienen las propiedades:

- ▶ $Y \in \Gamma_k$ si y sólo si $\dim(X_0 \cap Y) = n - k$,
- ▶ cada línea de $\mathcal{L}_n$ contiene dos elementos de Γ_k y un elemento de Γ_{k-1} , para algún k .

Las componentes conexas de Γ_k coinciden con los subespacios de X_0 de dimensión k .

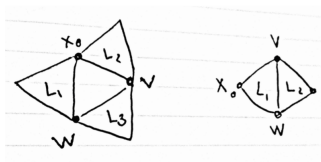
Espacio polar dual

Al espacio polar dual $\mathcal{G}_n$ le asociamos su **gráfica de colinearidad** Γ con vértices dados por $\mathcal{P}_n$ y ejes definidos por la colinearidad.

Fijamos un punto $X_0 \in \mathcal{P}_n$ y sea Γ_k la subgráfica inducida de los puntos a distancia k . Se tienen las propiedades:

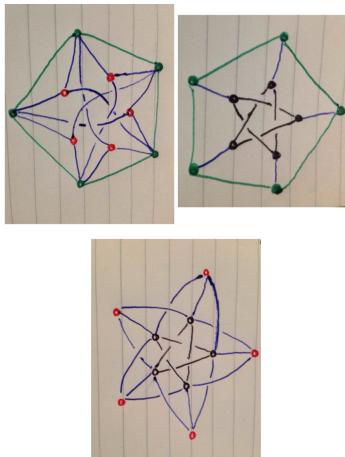
- ▶ $Y \in \Gamma_k$ si y sólo si $\dim(X_0 \cap Y) = n - k$,
- ▶ cada línea de $\mathcal{L}_n$ contiene dos elementos de Γ_k y un elemento de Γ_{k-1} , para algún k .

Las componentes conexas de Γ_k coinciden con los subespacios de X_0 de dimensión k . Por lo que **NO** podemos tener las posibilidades

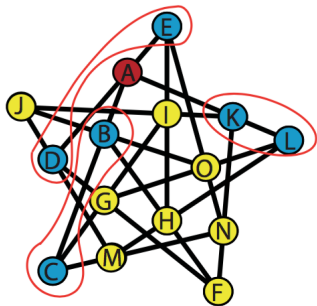
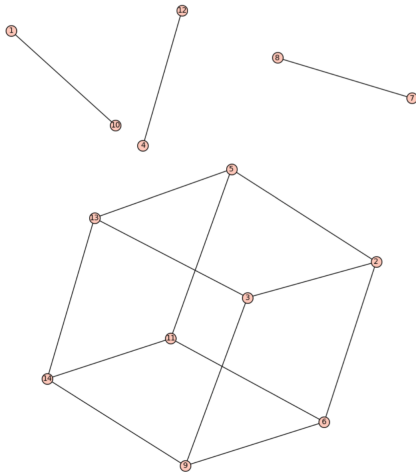


Para $n = 1$ tenemos Γ es un triángulo y

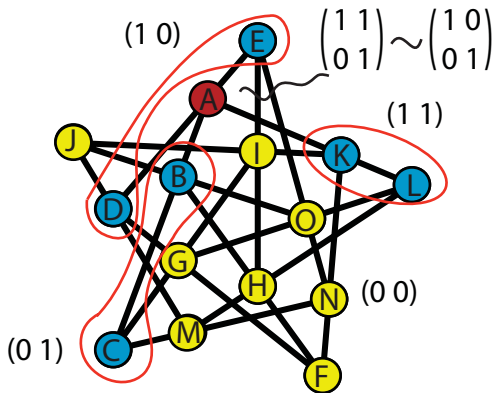
Para $n = 1$ tenemos Γ es un triángulo y para $n = 2$



y sus particiones en Γ_k



Case 1	Case 2	Case 3, 4, 5, 6	Case 7
11 (00)	12 (01)	$\emptyset$	22 (11)
21 (10)	23 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		

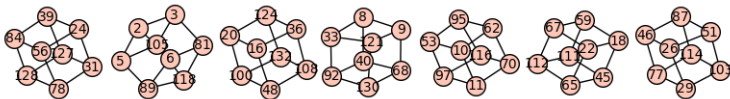


Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 7
111 (000)	112 (001)	212 (101)	222 $\begin{pmatrix} 110 \\ 011 \end{pmatrix}$	232 $\begin{pmatrix} 101 \\ 010 \end{pmatrix}$	122 (011)
121 (010)	123 $\begin{pmatrix} 010 \\ 001 \end{pmatrix}$				233 $\begin{pmatrix} 100 \\ 011 \end{pmatrix}$
211 (100)	213 $\begin{pmatrix} 100 \\ 001 \end{pmatrix}$				
221 (110)	223 $\begin{pmatrix} 110 \\ 001 \end{pmatrix}$				
231 $\begin{pmatrix} 110 \\ 010 \end{pmatrix}$	234 $\begin{pmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$				

Para $n = 3$ la configuración tiene 135 puntos y 315 líneas

Para $n = 3$ la configuración tiene 135 puntos y 315 líneas y Γ_2, Γ_3 son

Para $n = 3$ la configuración tiene 135 puntos y 315 líneas y Γ_2 , Γ_3 son



Para $n = 3$ la configuración tiene 135 puntos y 315 líneas y Γ_2, Γ_3 son

