

Variedades de Frobenius

Carlos Segovia González

Instituto de Matemáticas UNAM Oaxaca, México

Colaboración con Ramiro Bautista

Encuentro SCM-SMM, Universidad del Norte, Barranquilla

2 de junio del 2018

La pregunta

Cuántas curvas racionales de grado d pasan a través de $3d - 1$ puntos en posición general?

- ▶ Se sabía que $N_1 = N_2 = 1$.
- ▶ Jakob Steiner, *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (1848)
 $N_3 = 12$.
- ▶ Hieronymus G. Zeuthen, *Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver* (1873)
 $N_4 = 602$.
- ▶ En los ochenta $N_5 = 87304$.

- ▶ Maxim Kontsevich and Yuri I. Manin. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*. (1994)

$$N_d = \sum_{d_A+d_B=d} N_{d_A} N_{d_B} d_A^2 d_B \left(d_B \binom{3d-4}{3d_A-2} - d_A \binom{3d-4}{3d_A-1} \right).$$

- ▶ Sucesión A013587 en OEIS

$N_i =$

1, 1, 12, 620, 87304, 26312976, 14616808192, 13525751027392,
 19385778269260800, 40739017561997799680,
 120278021410937387514880, 482113680618029292368686080,
 2551154673732472157928033617920, ...

Álgebras de Frobenius

Definición (1)

Un álgebra de Frobenius es un k -álgebra A de dimensión finita, con una forma k -lineal $\theta : A \longrightarrow k$, que define una forma bilineal $g = \langle a, b \rangle := \theta(ab)$ no degenerada, compatible con el producto $\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle$.

Definición (2)

Un álgebra de Frobenius es un k -álgebra A de dimensión finita con una función lineal $\varepsilon : A \rightarrow k$ llamada counidad tal que el $\ker(\varepsilon)$ no tiene ideales no triviales.

Definición (3)

Un álgebra de Frobenius es un k -álgebra A de dimensión finita con un isomorfismo de A -módulos $\lambda : A \rightarrow A^$.*

Proposición

Las definiciones (1), (2), (3) son equivalentes.

Teorema (Folk)

Existe una equivalencia de categorías monoidales entre la categoría de **teorías topológicas de campos** y la categoría de **álgebras de Frobenius**.

Teorema (Abrams 1996)

Una álgebra conmutativa A de dimensión finita con producto $m : A \otimes A \rightarrow A$, con unidad $u : k \rightarrow A$, es un álgebra de Frobenius si y sólo si tiene un coproducto $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, con counidad $\theta : A \rightarrow k$, tal que Δ es un mapa de A -módulos, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ 1 \otimes \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes A \end{array}$$

El producto

- Para un álgebra de Frobenius A sea $\{e_i\}$ una base y $\{e_i^*\}$ la base dual, sean dos elementos de la forma $a = \sum \alpha_i e_i$ y $b = \sum \beta_i e_i$, el producto

$$a \cdot b = \sum \gamma_i e_i,$$

donde $\gamma_i = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \theta(e_j e_k^*)$. Luego el producto está dado en términos de una tres forma $c : A \otimes A \otimes A \longrightarrow \mathbb{k}$.

Ejemplos:

1. Sea $\mathbb{C}$ el campo de los números complejos con el mapa lineal $\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varepsilon(a + ib) = a$. Observamos que $\ker(\varepsilon) = \{ib : b \in \mathbb{R}\}$, lo cual no tiene ideales no triviales. Es decir, el campo de los números complejos es un álgebra de Frobenius sobre $\mathbb{R}$
2. Consideremos el álgebra de matrices $n \times n$, denotada por $M_n(k)$, con k un campo. La traza usual

$$\text{Tr}((a_{ij})) = \sum_i a_{ii},$$

define a un álgebra de Frobenius.

3. Sea $G = \{e, g_1, \dots, g_n\}$ un grupo finito, con e la identidad de G . Sea $\mathbb{C}[G]$ el álgebra de grupo definido por el conjunto de sumas formales $\sum_{i=0}^n c_i g_i$, con $c_i \in \mathbb{C}$ y $g_0 = e$. La multiplicación de $\mathbb{C}[G]$ está generada por la multiplicación de G . Tenemos que $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra de Frobenius con el mapa lineal definido por $\varepsilon : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $e \mapsto 1, g_i \mapsto 0$.

4. Para una variedad suave orientada (compacta) de dimensión n . Consideramos la cohomología con coeficientes en un campo k y notamos por $[M]$ la clase fundamental en homología. La estructura de Frobenius está dada por el isomorfismo

$$\Phi : H^{n-i}(M) \xrightarrow{h} \text{Hom}_k(H_{n-i}(M), k) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_k(H^i(M), k) \quad (1)$$

con h el mapa en coeficientes universales y D la dualidad de Poincaré. Obtenemos el producto mediante $\Phi(\phi)(\psi) = \phi([M] \cap \psi) = (\psi \cup \phi)[M]$.

Variedad de Frobenius

Definición

*Una variedad diferenciable tiene una estructura de Frobenius si sobre cada punto de la variedad, el espacio tangente tiene la estructura de un álgebra de Frobenius donde la forma bilineal no degenerada está inducida por la métrica. Una variedad es de **Frobenius** si esta estructura varía suavemente, denotada por $(M, \circ, e, g, \theta, E)$ y tal que*

- (i) $\circ$ es un producto asociativo en cada espacio tangente;*
- (ii) g es una métrica plana sobre M ;*
- (iii) e es unidad y $\nabla e = 0$;*
- (iv) ∇c es totalmente simétrica;*
- (v) $E \in \Gamma(TM)$ es un campo de Euler.*

- Tenemos un producto asociativo

$$\circ : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

compatible con la métrica, i.e. $g(x \circ y, z) = g(x, y \circ z)$, para $x, y, z \in T_p M$.

- Se tiene $\nabla e = 0$ si y sólo si $\nabla \theta = 0$.
- El campo de Euler se puede escribir como suma de dilataciones, rotaciones y traslaciones de la siguiente forma

$$E = \sum_{i,j} S_{i,j} t_i \partial_j + a \sum_i t_i \partial_i + \sum_i b_i \partial_i$$

donde S_{ij} es antisimétrica.

El potencial

- ▶ La curvatura está en términos de la conexión de Levi-Civita. Al ser la variedad plana un resultado de geometría diferencial asegura la existencia de un sistema de coordenadas $t_1, t_2, \dots, t_n$ donde la curvatura es constante.
- ▶ Si escribimos

$$c = \sum_{i,j,k} c_{i,j,k} dt_i dt_j dt_k$$

tenemos que

$$dc = \sum_{l,i,j,k} \frac{\partial c_{i,j,k}}{\partial t_l} dt_l dt_i dt_j dt_k,$$

la simetría de ∇c implica que

$$\frac{\partial c_{ijk}}{\partial t_l} = \frac{\partial c_{ijl}}{\partial t_k}$$

luego $dc = 0$ y por el lema de Poincaré existe una b_{ij} tal que $c_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k}$.

- ▶ Siguiendo con este proceso, tenemos que c_{ijk} es simétrico con respecto a i y j , es decir tenemos que

$$c_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial b_{ji}}{\partial t_k} = c_{jik}.$$

Luego si simetrizamos la forma b_{ij} la fórmula se sigue conservando y podemos suponer $b_{ij} = b_{ji}$. Esto nos produce una 2-forma

$$b = \sum_{ij} b_{ij} dt_i dt_j,$$

simétrica, pero como c_{ijk} es simétrica con respecto a j y k entonces obtenemos

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial b_{ik}}{\partial t_j}$$

lo que implica que $db = 0$, entonces por el lema de Poincaré existe una función a_i tal que

$$b_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial t_j}.$$

- ▶ Repitiendo nuevamente el argumento se produce una función generadora o potencial, F tal que

$$c = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} dt_i dt_j dt_k .$$

- ▶ En particular dado que e es covariantemente constante y bajo una rotación se puede tomar

$$e = \frac{\partial}{\partial} t_1 \text{ y } \theta = dt_1 ,$$

recordando que $g(u, v) = c(u, v, e)$, entonces

$$g = \sum_{j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k .$$

Teorema

La propiedad asociativa en una variedad de Frobenius equivale a tener las ecuaciones diferenciales WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde).

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} g^{kl} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_m \partial t_n} = \frac{\partial^3 F}{\partial t_m \partial t_j \partial t_k} g^{kl} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_i \partial t_n}$$

Ejemplos de Variedades de Frobenius

Consideremos el potencial $F = \frac{1}{2}t_1^2 t_3 + \frac{1}{2}t_1 t_2^2 + f(t_2, t_3)$. La métrica la podemos escribir

$$g = \sum_{j \leq k=1}^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} dt_j dt_k$$

la cual se simplifica a

$$g = dt_1 dt_3 + dt_2^2.$$

Para la multiplicación utilizamos la expresión

$$c = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} dt_i dt_j dt_k.$$

la cual se simplifica a

$$\begin{aligned} c(t_1, t_2, t_3) = & dt_1^2 dt_3 + dt_1 dt_2^2 + f_{t_2 t_2 t_2}(t_2, t_3) dt_2^3 + \\ & + f_{t_2 t_3 t_2}(t_2, t_3) dt_2^2 dt_3 + f_{t_3 t_3 t_2}(t_2, t_3) dt_2 dt_3^2 + f_{t_3 t_3 t_3}(t_2, t_3) dt_3^3. \end{aligned}$$

Los productos están dados por

$$\begin{aligned}\partial_2^2 &= f_{t_3 t_2 t_2} \partial_1 + f_{t_2 t_2 t_2} \partial_2 + \partial_3 \\ \partial_2 * \partial_3 &= f_{t_3 t_2 t_3} \partial_1 + f_{t_2 t_2 t_3} \partial_2 \\ \partial_3^2 &= f_{t_3 t_3 t_3} \partial_1 + f_{t_2 t_3 t_3} \partial_2\end{aligned}$$

y la asociatividad dada por las ecuaciones WDVV se convierte en una ecuación conocida como la ecuación de Chazy

$$f_{t_2 t_2 t_3}^2 = f_{t_2 t_2 t_2} f_{t_2 t_3 t_3} + f_{t_3 t_3 t_3}.$$

Cálculo de Kontsevich

Calcularemos el siguiente número: **El número de curvas de grado d que pasan por $3d-1$ puntos colocados de forma genérica.** Denotamos dicho número por N_d .

Dada la función potencial F donde f está definida por

$$f(t, u) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d e^{dt} u^{3d-1}}{(3d-1)!} N_d$$

con la condición inicial $N_1 = 1$, la cual satisface la ecuación de Chazy $(f_{ttu})^2 = f_{ttt}f_{tuu} + f_{uuu}$, la cual equivale a tener

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left[(i(k-i))^2 \binom{3k-4}{3i-2} - (k-i)(i)^3 \binom{3k-4}{3i-1} \right] N_i N_{k-i}.$$

for $k = 2, 3, 4$ this gives $N_2 = N_1 N_1$, $N_3 = 12 N_1 N_2$ y
 $N_4 = 33 N_3 N_1 + (16)(14) N_2^2$ y $N_2 = 1$, $N_3 = 12$, $N_4 = 620$.
 $N_k = 1, 1, 12, 620, 87304, 26312976, 14616808192, \dots$