Tarea 1
Álgebra Moderna 1 (2019-1)

1. Demuestra que si G es un grupo y $H, K \leq G$ entonces $H \cap K \leq G$, o da un contraejemplo.

2. Demuestra que si G es un grupo y $H, K \leq G$, entonces $H \cup K \leq G$, o da un contraejemplo.

3. Sea G un grupo finito con $o(G) > 1$ cuyos únicos subgrupos son G y $\{e\}$. Demuestra que $o(G) = p$ con p primo.

4. Demuestra que un grupo cíclico finito de orden n tiene exactamente un subgrupo para cada divisor d de n.

5. Demuestra que si G es un grupo tal que para todos $a, b \in G$ se cumple que $(ab)^2 = a^2b^2$ entonces G es abeliano.

6. En S_3 da un ejemplo de dos elementos x, y tales que $(xy)^2 \neq x^2y^2$.

7. Sean G un grupo y $H \leq G$. Demuestra que si toda clase lateral derecha de H en G también es clase lateral izquierda de H en G, entonces $\forall a \in G,\ aHa^{-1} = H$, donde $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$.

8. Si aH y bH son clases laterales izquierdas distintas de un subgrupo H en un grupo G, entonces ¿se cumple que Ha y Hb son clases laterales derechas distintas de H en G? Justifica tu respuesta.

9. Sea H un subgrupo de un grupo G y $a, b \in G$. ¿Es cierto que si $Ha = Hb$, entonces $Ha^2 = Hb^2$? Demuestra o da un contraejemplo.

10. Demuestra que cada clase lateral derecha del subgrupo aditivo $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ contiene exactamente un representante $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x < 1$.