Tarea 1
Álgebra Moderna II (2020-1)

1. Demuestra que si U es un ideal de un anillo R y U contiene una unidad de R entonces $U = R$.

2. Demuestra que el conjunto de unidades del anillo de los cuaternios $\mathbb{H}^{\times} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es un grupo con la multiplicación de $\mathbb{H}$. ¿Es abeliano? Justifica tu respuesta.

3. Demuestra que las unidades de un anillo conmutativo con $1 \neq 0$ forman un grupo abeliano con la multiplicación.

4. Encuentra un ejemplo de un anillo R con un subanillo S que no es ideal de R.

5. Sean R y R' anillos no triviales con 1 y $1'$ respectivamente, y $\phi : R \to R'$ un epimorfismo. Demuestra que $\phi(1) = 1'$.

6. Sean R un anillo conmutativo y $N = \{r \in R | r^n = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que N es ideal de R.

7. Sean R un anillo y $Z(R) = \{z \in R \mid zr = rz \ \forall r \in R\}$ el *centro* de R. Demuestra que:

   a) $Z(R)$ es un subanillo de R, y

   b) si R es anillo con división entonces $Z(R)$ es campo.

   ¿$Z(R)$ es ideal de R? Justifica tu respuesta.

8. Sea R un anillo tal que $a^2 = a$ para todo $a \in R$ (esto es, un anillo *booleano*). Demuestra que R es conmutativo.

9. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo no trivial con 1. Definimos un anillo $(R', \oplus, \odot)$ como sigue:
   $R' = R$, y $\forall a, b \in R'$, $a \oplus b = a + b + 1$ y $a \odot b = a \cdot b + a + b$.

   a) Demuestra que $(R', \oplus, \odot)$ es un anillo isomorfo a $(R, +, \cdot)$.

   b) ¿Cuáles son el cero y el uno en R'?

10. Existen (salvo isomorfismo), dos grupos de orden 4. El cíclico, y el de Klein (que no es cíclico, tiene tres elementos de orden 2). Demuestra que el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (el anillo de *enteros gaussianos*, con las operaciones de $\mathbb{C}$) es un grupo de orden 4 y determina a cuál de los dos es isomorfo (justifica bien tu respuesta).