Tarea 2
Álgebra Moderna 1 (2019-1)

1. Da un ejemplo de un grupo G y dos subgrupos $H, K \trianglelefteq G$ tales que $H \cong K$ pero que $G/H \ncong G/K$.

2. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico generado por $g \in G$. Demuestra que si $\phi_1 : G \to G'$ y $\phi_2 : G \to G'$ son homomorfismos de grupos tales que $\phi_1(g) = \phi_2(g)$, entonces $\phi_1 = \phi_2$.

3. Sea $\varphi : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Demuestra que:

   a) Si $N \trianglelefteq G$, entonces $\varphi(N) \trianglelefteq \mathrm{Im}\varphi$.

   b) Si $N' \trianglelefteq G'$, entonces $\varphi^{-1}(N') \trianglelefteq G'$, donde $\varphi^{-1}(N') = \{g \in G \; | \varphi(g) \in N'\}$.

4. Sean G un grupo y $a \in G$. Definimos al *centralizador* de a en G como $C_G(a) = \{g \in G | ag = ga\}$. Demuestra que $C_G(a) \leq G$.

5. Sean G un grupo y $H \leq G$. Definimos al *centralizador* de H en G como $\{g \in G | gh = hg \; \forall h \in H\}$. Demuestra que $C_G(H) \leq G$.

6. Sean G un grupo y $H \leq G$. Definimos el *normalizador* de H en G como $N_G(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$. Demuestra que:

   a) $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$.

   b) Si $H \trianglelefteq K \leq G$, entonces $K \leq N_G(H)$.

   c) $H \trianglelefteq G$ si y sólo si $N_G(H) = G$.

   ¿Qué relación hay entre $C_G(H)$ y $N_G(H)$? Explica tu respuesta.

7. El *centro* de un grupo G es $Z(G) = \{z \in G | zg = gz \; \forall g \in G\}$, el conjunto de elementos de G que conmutan con TODOS los elementos de G. Demuestra que $Z(G) \trianglelefteq G$.

8. Sean $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, y $N = \{a + bi \in \mathbb{C} | a^2 + b^2 = 1\}$. Demuestra que $N \trianglelefteq G$ y $G/N \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$.

9. Sean G un grupo y H un subgrupo de índice 2 en G. Demuestra que entonces $H \trianglelefteq G$.

10. Sean G un grupo y $Z := Z(G)$ el centro de G. Demuestra que G/Z es cíclico si y sólo si G es abeliano.