Tarea 3
Álgebra Moderna 1 (2019-1)

1. Si p es primo, demuestra que cualquier grupo de orden $2p$ tiene un subgrupo normal de orden p.

2. Escribe la siguiente permutación en S_9 como producto de ciclos disjuntos:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Expresa la siguiente permutación como producto de ciclos disjuntos: $(1\ 2)(1\ 3\ 4)(2\ 3)$ (recuerda que estamos permutando de izquierda a derecha).

4. Demuestra que $(1\ 2\ \ldots\ n)^{-1} = (n\ n-1\ \ldots\ 2\ 1)$.

5. *a*) Sean $\alpha = (1,3,2)(4,5)$ y $\beta = (2,5,3)(1,4)$ en S_5. Encuentra alguna $\gamma \in \mathrm{S}_5$ tal que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$.
   b) Sean $\alpha = (1,3)(2,4)$ y $\gamma = (2,5,3,4)$ en S_5. Encuentra $\beta = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. (Recuerda que permutamos de izquierda a derecha).

6. Encuentra todos los subgrupos normales de S_4.

7. Determina la paridad de las siguientes permutaciones (explica por qué):
   a) $(1\ 2)(1\ 3\ 4)(1\ 4\ 3)(2\ 4)$
   b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(2\ 3\ 5)(5\ 6)$

8. Encuentra las clases de conjugación en A_5.

9. Con el ejercicio anterior, demuestra que A_5 es simple.

10. Con el ejercicio anterior, demuestra que A_5 no tiene subgrupos propios de orden mayor a 12, dando un contraejemplo a un enunciado recíproco del Teorema de Lagrange.