Tarea Examen 4
Álgebra Moderna 1 (2019-1)

1. Demuestra que si G es un grupo de orden p^n y $H < G$ es de orden p^{n-1} con p primo y $n \geq 1$ entonces $H \lhd G$.

2. Demuestra que si G es un grupo de orden pq con p y q primos tales que $p < q$, entonces G tiene un subgrupo normal de orden q.

3. Sean G un grupo finito, p un primo que divide a $o(G)$, y P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que P es el único p-subgrupo de Sylow de G contenido en $N_G(P)$.

4. Escribe explícitamente TODOS los subgrupos de Sylow de A_4.

5. Demuestra que si G es un grupo abeliano finito entonces es producto directo de sus subgrupos de Sylow.

6. Sean G un grupo finito y $N_1, \ldots, N_k$ subgrupos normales de G tales que $o(G) = o(N_1) \cdots o(N_k)$. Demuestra que G es el producto directo de $N_1, \ldots, N_k$.

7. Sea G un grupo de orden 18. Demuestra que tiene un subgrupo de Sylow normal.

8. Describe, salvo isomorfismo, todos los grupos abelianos de los siguientes órdenes:

   a) 36,

   b) 121, y

   c) 16.

9. Sean G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Demuestra que si N y G/N son solubles, entonces G es soluble.

10. Demuestra que la imagen homomorfa de un grupo soluble es un grupo soluble.