

TAREA DEL DIPLOMADO EN RIESGO

GERÓNIMO URIBE BRAVO

Ejercicio 1. Suponga que las familias de México emigran a Estados Unidos a tasa $\lambda = 2$ por día. El número de miembros de cada familia puede tomar los valores 1, 2, 3 ó 4 con probabilidades $1/6, 1/3, 1/3$ y $1/3$. Asuma que los miembros de las distintas familias son independientes. ¿Cuál es la cantidad esperada y la varianza de la cantidad de individuos que emigran a EU en un lapso de 4 semanas?

Ejercicio 2. Sea N un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ . Sea $E = (-1, 1)$ y X_0 una variable aleatoria con valores en E independiente de N . Se define el proceso

$$X_t = X_0 \times (-1)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

- (1) Explique por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en E . Sugerencia: ¿Qué valores toma X_t ? ¿Cómo son las trayectorias de X_t ? ¿Cuánto permanece en cada estado?
- (2) Calcule sus probabilidades de transición y su matriz infinitesimal. Diga si X es irreducible.
- (3) ¿Existe una distribución estacionaria para esta cadena? En caso afirmativo ¿Cuál es?
- (4) (Opcional) Calcule las probabilidades de transición para X_t .

Ejercicio 3 (Opcional). Sea

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Haga un programa en R que permita simular las trayectorias de una cadena de Markov a tiempo continuo X con matriz infinitesimal Q .
- (2) Utilice su programa para generar 10000 trayectorias en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ comenzando con probabilidad $1/2$ en cada estado y obtenga la distribución empírica de X_{10} .
- (3) Al utilizar la función `expm` (que debe cargar a su librería en R), calcule e^{10Q} y contraste con la distribución empírica del inciso anterior.
- (4) Codifique el siguiente esquema numérico, conocido como método de Euler, para aproximar a e^{10Q} : escoja $h > 0$ pequeño, defina a P_0^h como la matriz identidad y recursivamente

$$P_{i+1}^h = P_i^h + hQP_i^h.$$

corra hasta que $i = \lfloor 10/h \rfloor$ y compare la matriz resultante con e^{10Q} . Si no se parecen escoja a h más pequeño. ¿Con qué h puede aproximar a e^{10Q} a 6 decimales?