TAREA 3, CADENAS DE MARKOV A TIEMPO CONTINUO
PROCESOS ESTOCÁSTICOS I, CNSF 2012

Ejercicio 1. *Sea N un proceso de Poisson y $P_t(i,j) = \mathbb{P}(N_t = j - i)$.*

(1) Al utilizar el teorema del binomio, pruebe directamente que se satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$P_{t+s}(i,k) = \sum_j P_s(i,j)\, P_t(j,k)\,.$$

Dé además un argumento probabilístico, basado en condicionar con lo que sucede al tiempo s, para probar dicha ecuación.

(2) Sea

$$Q(i,j) = \begin{cases} -\lambda & j = i \\ \lambda & j = i+1 \\ 0 & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

Pruebe directamente que

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = QP_t(i,j) = P_tQ(i,j)\,,$$

donde QP_t es el producto de las matrices Q y P_t.

Ejercicio 2. *Haga un programa en R que simule al proceso de nacimiento puro que comienza en 1 si $\lambda_i = i\lambda$ para algún $\lambda > 0$. ¿Este proceso explota? Haga otro programa que simule el caso $\lambda_i = \lambda i^2$ y diga si ocurre explosión o no.*

Ejercicio 3. *(Modificado del examen general de conocimientos del área de Probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Febrero 2011)*

Una planta de producción toma su energía de dos generadores. La cantidad de generadores al tiempo t está representado por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0,1,2\}$ y matriz infinitésimal Q dada por

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Haga un programa en R que le permita simular la cadena descrita. Utilícelo para encontrar numéricamente la distribución estacionaria.

(2) Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X, clasifique los estados, diga si existe una única distribución invariante y en caso afirmativo, encuéntrela. Calcule explícitamente las potencias de la matriz de transición. (Recuerde que de ser posible diagonalizar, esta es una buena estrategia.)

(3) *¿Cuál es la probabilidad de que ambos generadores estén trabajando al tiempo t si sólo uno trabaja al tiempo cero?*
(4) *Si ρ_2 denota la primera vez que ambos generadores están trabajando al mismo tiempo, encuentre la distribución de ρ_2 cuando sólo un generador está trabajando al tiempo cero.*
(5) *Encuentre la proporción de tiempo asintótica en que los dos generadores están trabajando. Si cada generador produce 2.5 MW de energía por unidad de tiempo, ¿Cuál es la cantidad promedio de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo?*

Ejercicio 4. *(Tomado del examen general de conocimientos del área de Probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Agosto 2011)*

Sea N un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ. Sea $E = (-1, 1)$ y X_0 una variable aleatoria con valores en E independiente de N. Se define el proceso

$$X_t = X_0 \times (-1)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

(1) *Explique por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en E.*
(2) *Calcule sus probabilidades de transición y su matriz infinitesimal.*
(3) *¿Existe una distribución estacionaria para esta cadena? En caso afirmativo ?'Cuál es?*

Ejercicio 5. *Sea*

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) *Haga un programa en R que permita simular las trayectorias de una cadena de Markov a tiempo continuo X con matriz infinitesimal Q.*
(2) *Utilice su programa para generar 10000 trayectorias en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ comenzando con probabilidad $1/2$ en cada estado y obtenga la distribución empírica de $X_1 0$.*
(3) *Al utilizar la función expm (que debe cargar a su librería en R), calcule e^{10Q} y contraste con la distribución empírica del inciso anterior.*
(4) *Codifique el siguiente esquema numérico, conocido como método de Euler, para aproximar a e^{10Q}: escoja $h > 0$ pequeño, defina a P_0^h como la matriz identidad y recursivamente*

$$P_{i+1}^h = P_i^h + hQP_i^h.$$

corra hasta que $i = \lfloor 10/h \rfloor$ y compare la matriz resultante con e^{10Q}. Si no se parecen escoja a h más pequeño. ¿Con qué h puede aproximar a e^{10Q} a 6 decimales?