TAREA 2, PROCESOS DE POISSON
PROCESOS ESTOCÁSTICOS I, CNSF 2012

Ejercicio 1. [Nor98], *p. 81, prob. 2.4.3 Los arribos de la linea 1 del camión forman un proceso de Poisson de tasa 1 por hora y los de la linea 7 forman un proceso de Poisson independiente de tasa 7 camiones por hora.*

(1) ¿Cuál es la probabilidad que exactamente pasen 3 camiones en una hora?
(2) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen exactamente 3 camiones de la liena 7 mientras espero al de la linea 1?
(3) Cuando el equipo de mantenimiento realiza una huelga, la mitad de los camiones no llegan a mi parada. Cuál es entonces la probabilidad de que espere 30 minutos sin ver un sólo camión.

Ejercicio 2. [Nor98], *p.81, Problema 2.4.5 Un peatón desea cruzar una calle de un sólo sentido. Suponga que la cantidad de vehículos que han pasado hasta el tiempo t forman un proceso de Poisson de intensidad λ y suponga que toma a unidades de tiempo cruzar la calle. Asumiendo que el peatón no cruza hasta estar seguro de que no lo atropellan, ¿Cuanto tarda en promedio en cruzar la calle? Responda la misma pregunta si debe cruzar dos calles sucesivas cuando hay un camellón en medio y cuando no lo hay.*

Ejercicio 3. [Mik09], *p. 49, Ejercicio 2.1.6.12 Sean $U_1, \ldots, U_n$ iid uniformes en $(0,1)$ y sean $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$ sus estadísticas de orden. Sean $S_1, S_2, \ldots$ iid exponenciales de parámetro λ y $T_i = S_1 + \cdots + S_i$ sus correspondientes sumas parciales.*

(1) Al utilizar el proceso de Poisson, interprete la igualdad

$$\left(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}\right) \stackrel{d}{=} \left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \ldots, \frac{T_n}{T_{n+1}}\right).$$

(2) Pruebe la igualdad anterior cuando $n = 2$ y 3. Sugerencia: para obtener la densidad del lado derecho, calcule la densidad conjunta de

$$\left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \ldots, \frac{T_n}{T_{n+1}}, T_{n+1}\right).$$

(3) Pruebe la igualdad anterior en el caso general. (Si resuelve este inciso puede omitir el anterior.)

Ejercicio 4 (Examen general de probabilidad, UNAM, 2012-1)**.** *Suponga que las familias de México emigran a Estados unidos a una tasa de $\lambda = 2$ por día y que las llegadas a EU forman un proceso de Poisson de tasa λ. Si el número de miembros de cada familia puede tomar los valores 1,2,3 y 4 con probabilidades $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$ respectivamente y además se puede asumir que los números de miembros de las familias son independientes, entonces ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de la cantidad de individuos que llegan a EU en 5* *semanas? Haga un programa en R que permita observar cómo evoluciona la cantidad de individuos que llegan a EU durante las 5 semanas.*

Ejercicio 5 (Examen general de probabilidad, UNAM, 2012-1). *Sea* $(Z_t, t \geq 0)$ *un proceso de Poisson compuesto. Sea* λ *la intensidad del proceso de Poisson* N *que determina a* Z*. Suponga que las magnitudes de los saltos son variables aleatorias no-negativas con distribución* F*. Pruebe que para cada* $\alpha, t \geq 0$

$$\mathbb{E}\left(e^{-\alpha Z_t}\right) = e^{-\lambda t(1-f(\alpha))}$$

donde $f(\alpha) = \mathbb{E}\left(e^{-\alpha X_i}\right)$.

Ejercicio 6. *Sea* N *un proceso de Poisson de intensidad* λ *y definamos*

$$P_t(x, y) = \mathbb{P}(\, N_{t+s} = y \mid N_s = x) \, .$$

Calcule explícitamente el valor de $P_t(x, y)$ *y compruebe que no depende de* x*. Al utilizar el teorema del biniomio, pruebe directamente que*

$$P_{t+s}(i, k) = \sum_j P_s(i, j)\, P_t(j, k)\, .$$

Dé además un argumento probabilístico, basado en condicionar con lo que sucede al tiempo s*, para probar dicha ecuación.*

References

[Mik09] Thomas Mikosch, *Non-life insurance mathematics*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2009, An introduction with the Poisson process. MR 2503328 (2010c:91001)

[Nor98] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of 1997 original. MR 1600720 (99c:60144)