# Repaso general

Gerónimo Uribe Bravo

Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

9 de Octubre del 2012

Hemos visto 4 clases de procesos estocásticos.

1. Cadenas de Markov (tiempo y espacio discretos)
2. Procesos de renovación
3. Procesos de Poisson
4. Cadenas de Markov a tiempo continuo (y espacio discreto)

Salvo la segunda clase, están muy relacionadas y se basan en la misma idea:
*La propiedad de Markov*
Interpretación de la propiedad de Markov:
*El futuro es independiente del pasado dado el presente*.

# Cadenas de Markov

## Definición

Una **cadena de Markov** con matriz de transición $P$ y distribución inicial $\pi$ es un proceso estocástico $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $E$ tal que si $x_0, \ldots, x_1 \in E$ entonces

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \pi_{x_0} P_{x_0,x_1} \cdots P_{x_{n-1},x_n}.$$

## Definición

Una **cadena de Markov a tiempo continuo** con probabilidades de transición $P_t, t \geq 0$ y distribución inicial $\pi$ es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con valores en $E$ tal que si $x_0, \ldots, x_n \in E$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_n$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \pi_{x_0} P_{t_1 - t_0}(x_0, x_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\,.$$

# Cadenas de Markov

## Definición

Una **cadena de Markov a tiempo continuo** con probabilidades de transición $P_t, t \geq 0$ y distribución inicial $\pi$ es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con valores en $E$ tal que si $x_0, \ldots, x_n \in E$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_n$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \pi_{x_0} P_{t_1 - t_0}(x_0, x_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\,.$$

## Resultado

Si $N = (N_t, t \geq 0)$ es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda$:

$$\mathbb{P}(N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n) = P_{t_1 - t_0}(x_0, x_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)$$

donde

$$P_t(i,j) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

# Simulación de cualquier cadena de Markov

Sea $P$ una matriz estocástica en $\{1, \ldots, n\}$:

- $P_{i,j} \geq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^{n} P_{i,j} = 1$

Sea $\pi$ una distribución inicial: $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, donde $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.

Para simular una cadena de Markov con distribución inicial $\pi$ y matriz de transición $P$ se sigue la siguiente idea: utilizamos $U_0, U_1, \ldots$ variables uniformes independientes. (Recordemos que con variables uniformes podemos generar a cualquier variable aleatoria.)

- Utilizamos $U_0$ para generar a $X_0$ de tal manera que $\mathbb{P}(X_0 = i) = \pi_i$.
- Procedemos recursivamente al utilizar a $X_n$ y a $U_{n+1}$ para generar a $X_{n+1}$: si $X_n = i$, utilizamos a $U_{n+1}$ para que $\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = P_{i,j}$.

En otras palabras, $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$ (con la misma función para toda $n$).

# Cadenas de Markov, preguntas fundámentales

Hemos hecho un estudio similar de cadenas de Markov a tiempo continuo y discreto, enfocándonos en la description a tiempos grandes de la cadena.

- ¿Tiene estados transitorios?
- ¿Se absorbe?
- ¿Es recurrente?
- ¿Hay fenómenos estacionales ? (Periodicidad)

En resumen: ¿Qué le pasa a la cadena en tiempo grandes?

Respuesta: Se absorbe, se escapa a infinito, es recurrente pero no lo suficiente como para que se observe estabilización ó la distribución de la cadena a tiempos grandes se estabiliza.

# Cadenas de Markov, Propiedad de Markov

## Propiedad de Markov

Si $X = (X_n, n \geq 0)$ es una cadena de Markov con matriz de transición $P$ y $Y_n = X_{n+m}$, entonces, condicionalmente a $X_m = i$, $Y_n$ es una cadena de Markov con matriz de transición $P$ que comienza en $i$ y que es independiente de $X_0, \ldots, X_m$.

## Tiempo de paro

Un tiempo aleatorio $T$ es un **tiempo de paro** si para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \subset E^{n+1}$ tal que

$$\{T = n\} = \{(X_0, \ldots, X_n) \in A_n\}.$$

## Propiedad de Markov fuerte

Sea $X$ una cadena de Markov con matriz de transición $P$. Si $Y_n = X_{T+n}$, entonces (condicionalmente a $T = m$ y $X_m = i$) $Y$ es una cadena de Markov con matriz de transición $P$ que comienza en $i$ y que es independiente de $X_0, \ldots, X_m$.

# Cadenas de Markov, Clases de comunicación

## Chapman-Kolmogorov y potencias de la matriz de transición

Para cadenas de Markov se satisfacen las *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*: si $P^n_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = j \,|X_0 = i)$ entonces

$$P^{n+m}_{i,k} = \sum_j P^m_{i,j} P^n_{j,k}.$$

Es por esto que la colección numérica $\left(P^n_{i,j}, i, j \in E\right)$ es la potencia $n$ de $P$.

## Clases de comunicación

El espacio de estados de una cadena de Markov se puede particionar en clases de comunicación: dos estados $i$ y $j$ se comunican entre si si existen $n \geq 0$ y $m \geq 0$ tal que $P^m_{i,j} > 0$ y $P^{j,i} > 0$. Una cadena de Markov es **irreducible** si todos los estados se comunican entre sí. Esto es, si hay una sóla clase de comunicación.

## Transitoriedad y recurrencia

Sea $x \in E$. Definamos a la cantidad de visitas al estado $x$ como la variable aleatoria

$$V_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = x}.$$

Esta variable aleatoria podría tomar el valor infinito. Sin embargo, un resultado curioso es que si toma el valor infinito con probabilidad positiva, entonces toma el valor infinito con probabilidad 1. En caso de que $V_x$ sea infinita con probabilidad 1 bajo $\mathbb{P}_x$ hablamos de un **estado recurrente** y en caso contrario de un **estado transitorio**.

El conjunto $\{V_x = \infty\}$ tiene probabilidad cero (decimos que $x$ es **transitorio**) ó uno (decimos que $x$ es **recurrente**)

# Cadenas de Markov, Transitoriedad y recurrencia

## Conjuntos abiertos y cerrados

Sea $C$ un subconjunto del espacio de estados $E$. Decimos que $C$ es un **conjunto cerrado** si para toda $y \in E \setminus C$, $x$ no conduce a $y$. Un **conjunto abierto** es aquel que no es cerrado.

## Criterios útiles para transitoriedad y recurrencia

- Todos los estados de una clase de comunicación son recurrentes o todos son transitorios.
- Una clase abierta es transitoria.
- Una clase cerrada y finita es recurrente.
- Una cadena irreducible y finita es recurrente.

# Cadenas de Markov, Distribuciones Invariantes

## Estados positivo recurrentes

Un estado $x$ de una cadena de Markov es **positivo recurrente** si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$. Denotamos por $m_x$ a dicha cantidad, a la que nos referiremos como tiempo medio de recurrencia de $x$.

## Distribuciones invariantes

Una **distribución invariante** es un vector renglón $\pi$ que satisface

$$\pi_i > 0, \quad \sum_i \pi_i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_i \pi_i P_{i,j} = \pi_j.$$

# Cadenas de Markov, Distribuciones Invariantes

## Caracterización de estados positivo recurrentes.

Para una cadena irreducible las siguientes condiciones son equivalentes.

1. Todos los estados son positivo recurrentes
2. Algún estado es positivo recurrente
3. La cadena admite una distribución invariante.

En este caso, la distribución invariante es única y asigna a $x$ el recíproco de su tiempo medio de recurrencia.

## Teorema fundamental de convergencia

Si $P$ es la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible, aperiódica y positivo recurrente y $\pi$ es la única distribución invariante de $P$ entonces $\sum_y \left|P^n_{x,y} - \pi_y\right| \to 0$ conforme $n \to \infty$.

# Cadenas absorbentes

## Cadena absorbente

Una **cadena absorbente** es una cadena de Markov con espacio de estados finito, que tiene al menos un estado absorbente y que desde cualquier estado se puede acceder a un estado absorbente.

Los estados de una cadena absorbente los podemos dividir en no-absorbentes ($T$, pues son transitorios) y absorbentes ($A$). Si los enumeramos del 1 al $n$ y ponemos al final a los absorbentes, la matriz de transición tomará la forma

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde $Q$ es una matriz de tamaño $m \times m$ ($m < n$) en donde se encuentran las probabilidades de transición entre estados no-absorbentes, $R$ es una matriz de tamaño $m \times n$ correspondiente a las probabilidades de transición de estados no-absorbentes a absorbentes, mientras que $I$ es la matriz identidad de tamaño $(n - m) \times (n - m)$.

# Cadenas absorbentes

## La matriz fundamental

La matriz $I - Q$ es invertible. Si $M = (I - Q)^{-1}$ entonces

$$M_{i,j} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots = \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = j}\right).$$

Si $t_i = \mathbb{E}_i(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n \in T})$ entonces

$$t = M\mathbf{1}.$$

Si $B_{i,j} = \mathbb{P}_i(X_T = j)$ entonces

$$B = MR.$$

# Procesos de renovación

## Proceso de contéo

Un **proceso de contéo** es un proceso con trayectorias constantes por pedazos $N$ que comienza en cero, toma valores enteros y va incrementando de uno en uno en los instantes $T_1 < T_t < \cdots$.

Sea $T_0 = 0$ y $S_i = T_i - T_{i-1}$.
La sucesión $S$ será la **sucesión de tiempos de vida**, la sucesión $T$ la de **tiempos de renovación** y la sucesión $N$ será el **proceso de contéo asociado**.

## Proceso de renovación

Estamos ante un **fenómeno de renovación** cuando los tiempos de vida son independientes e idénticamente distribuidos.
Un **fenómeno de renovación aritmético** es aquel en el que $S_i$ toma valores en $\mathbb{N}$.

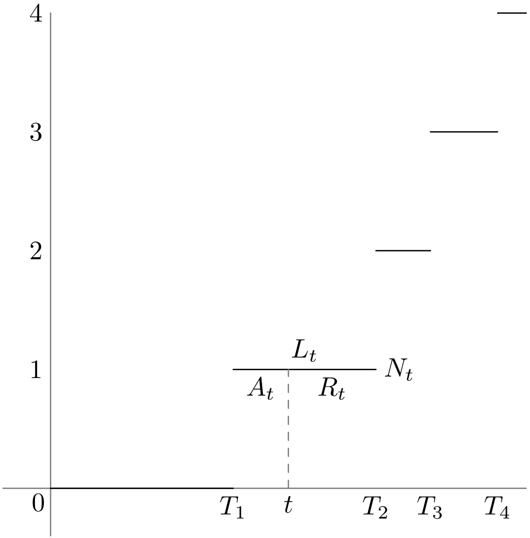


Figure: Ilustración de las definiciones de proceso de renovación

# Resultados básicos de la teoría de renovación

Ley fuerte de los grandes números

Si $\mu = \mathbb{E}(S_i) < \infty$ entonces $N_t/t \to 1/\mu$ casi seguramente

Teorema de renovación elemental

Si $\mu = \mathbb{E}(S_1) < \infty$ entonces $m(t)/t \to 1/\mu$.

# La medida de renovación (caso aritmético)

Sea

$$u_n = \mathbb{P}(\exists m, T_m = n) = \sum_m \mathbb{P}(T_m = n)$$

## Teorema de renovación clave de Erdős-Feller-Pollard

Para un proceso de renovación aritmético, aperiódico y con media finita:

$$\lim_{n \to \infty} u_n \to \frac{1}{\mu}.$$

# El teorema de renovación de Blackwell

Sea $S$ un proceso de renovación no-aritmético. Se puede pensar que $S_i$ es una variable aleatoria con densidad. Sea $T$ la sucesión de tiempos de ocurrencia de sucesos y $N$ el proceso de contéo asociado.

### Medida de renovación

La **medida de renovación** es la medida $U$ en $[0, \infty)$ tal que

$$U([0,t]) = \mathbb{E}(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) .$$

Se utilizará la notación $U_t$ para $U([0,t])$.

### Teorema de renovación de Blackwell

Para todo $h > 0$:

$$\lim_{t \to \infty} U_{t+h} - U_t = \frac{h}{\mu}.$$

# La ecuación de renovación

Escribiremos

$$p_k = p(k) = \mathbb{P}(S_1 = k) \quad \text{y} \quad u_n = \mathbb{P}(\exists m, T_m = n) = \sum_m \mathbb{P}(T_m = n)$$

## Teorema clave de renovación en el caso discreto

Si $z$ es solución a la ecuación de renovación

$$z(n) = b(n) + \sum_{j \leq n} p_k z(n-j)\,.$$

y $b$ es sumable entonces $z$ está dada por $z(n) = \sum_x b(x)\, u(n-x)$ y $z(n) \to \sum_x b(x)\,/\mu$ conforme $n \to \infty$.

# El proceso de Poisson

### Proceso de contéo

Un **proceso de contéo** es un proceso con trayectorias constantes por pedazos que comienza en cero, toma valores enteros y va incrementando de uno en uno en los instantes $T_1 < T_t < \cdots$. Sea $T_0 = 0$. A $S_i = T_i - T_{i-1}$ se le llama $i$-ésimo tiempo interarribo.

### Proceso de Poisson

Un **proceso de Poisson** de intensidad $\lambda$ es un proceso de contéo $N$ tal que

- La distribución de $N_{t+s} - N_t$ es Poisson de parámetro $\lambda$
- Si $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, las variables $N_{t_1} - N_{t_0}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ son independientes.

### El proceso de Poisson como fenómeno de renovación

Un proceso de contéo es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda$ si y sólo si sus tiempos interarribo son exponenciales independientes de parámetro $\lambda$.

# Propiedad de Markov del proceso de Poisson

## Propiedad de Markov del proceso de Poisson

Sea $N$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda$. El proceso $N^t$ dado por $N_s^t = N_{t+s} - N_t$ es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda$ y es independiente de $N_s, s \leq t$.

# El proceso de Poisson compuesto

Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ donde $\xi_1, \xi_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes. (Interpretamos a $\xi_i$ como el monto de la $i$-ésima reclamación de una compañía de seguros.)
Sea $N$ un proceso de Poisson independiente de $S$. (Interpretamos a $N_t$ como la cantidad de reclamos que han llegado a la compañía de seguros en el intervalo de tiempo $[0, t]$.)
Entonces, al tiempo $t$, el monto total que ha sido reclamado a la compañía de seguros es

$$X_t = S_{N_t} = \sum_{i \leq N_t} \xi_i.$$

El proceso $X$ se conoce como proceso de Poisson compuesto.

E

l proceso de Poisson compuesto es un proceso de Lévy:

Incrementos estacionarios La distribución de $X_{t+s} - X_t$ sólo depende de $s$.

Incrementos independientes Si $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, las variables

# Cadenas de Markov a tiempo continuo

## Definición

Una **cadena de Markov a tiempo continuo** con probabilidades de transición $P_t, t \geq 0$ y distribución inicial $\pi$ es un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ con valores en $E$ y trayectorias constantes por pedazos y minimales tal que si $x_0, \ldots, x_n \in E$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_n$ entonces

$$\mathbb{P}(X_{t_0} = x_0, \ldots, X_{t_n} = x_n) = \pi_{x_0} P_{t_1 - t_0}(x_0, x_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n)\,.$$

## Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Las probabilidades de transición satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$P_{t+s} = P_t P_s.$$

# Cadenas de Markov a tiempo continuo, Propiedad de Markov

## Propiedad de Markov

Si $X$ es una cadena de Markov a tiempo continuo y $X_s^t = X_{t+s}$, entonces $X^t$ también es una cadena de Markov a tiempo continuo con las mismas probabilidades de trancisión que $X$. $X^t$ es independiente de $X_s, s \leq t$ condicionalmente a $X_t$.

## Tiempos de paro

Un **tiempo de paro** es una variable aleatoria $T$ tal que $\{T \leq t\} \in \sigma(X_s : s \leq t)$.

## Propiedad de Markov fuerte

Sea $T$ un tiempo de paro finito. Entonces el proceso $X^T$ dado por $X_t^T = X_{T+t}$ es una cadena de Markov con las mismas probabilidades de transición que $X$ que es independiente de $X_s, s \leq t$ condicionalmente a $X_T$ y a $T \leq t$.

# Caracterización de cadenas de Markov a tiempo continuo

Consideremos a los tiempos aleatorios

$$T_0 = 0, \quad T_{n+1} = \inf \{t \geq T_n : X_t \neq X_{T_n}\} \quad \text{y} \quad \zeta = \lim_{n\to\infty} T_n$$

con la convención $\inf \emptyset = \infty$. Consideremos además a la **cadena asociada**

$$Z_n = X_{T_n}$$

si $T_n < \infty$. Definimos $Z_{n+m} = Z_n$ para toda $m \geq 1$ si $T_n < \infty = T_{n+1}$.

## Caracterización de cadenas de Markov

El proceso $Z$ es una cadena de Markov de matriz de transición $P$ que comienza en $x$ bajo $\mathbb{P}_x$. Si $c(x) > 0$ para toda $x \in E$, condicionalmente a $Z$, las variables $S_1, S_2, \ldots$ con $S_i = T_i - T_{i-1}$ son independientes y exponenciales de parámetros $c(Z_0), c(Z_1), \ldots$.

# Caracterización de cadenas de Markov a tiempo continuo

## Caracterización de cadenas de Markov

El proceso $Z$ es una cadena de Markov de matriz de transición $P$ que comienza en $x$ bajo $\mathbb{P}_x$. Si $c(x) > 0$ para toda $x \in E$, condicionalmente a $Z$, las variables $S_1, S_2, \ldots$ con $S_i = T_i - T_{i-1}$ son independientes y exponenciales de parámetros $c(Z_0)\,, c(Z_1)\,, \ldots$.

## La matriz de tasas de transición

Sea $\alpha_{x,y} = c(x)\, P_{x,y}$.

## La matriz infinitesimal

Está dada por

$$Q_{x,y} = \begin{cases} \alpha_{x,y} & x \neq y \\ -c(x) & x = y \end{cases}.$$

Esta matriz satisface: $Q_{x,y} \geq 0$ si $x \neq y$, $\sum_y Q_{x,y} = 0$. Cualquier matriz que satisfaga las condiciones anteriores es la matriz infinitesimal de una cadena de Markov a tiempo continuo.

# Simulación de cadenas de Markov a tiempo continuo

Sea $Q$ una matriz infinitesimal y $\pi$ una distribución inicial. Para simular a una cadena de Markov con matriz infinitesimal $Q$ seguimos el siguiente procedimiento:

- Simulamos una variable $Z_0$ con distribución $\pi$.
- Si $Z_0 = x$ simulamos una variable exponencial $S_1$ con parámetro $c(x)$
- (Independientemente) simulamos una variable $X_1$ tal que $\mathbb{P}(X_1 = y) = Q(x, y) / c(x)$ si $y \neq x$.
- Si ya hemos construido a $Z_0, \ldots, Z_n$ y a $S_0, \ldots, S_n$ y $Z_n = x$,
- Simulamos a una variable exponencial $S_{n+1}$ con parámetro $c(x)$
- Simulamos a una variable $X_{n+1}$ tal que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y) = Q(x, y) / c(x)$ si $y \neq x$.

Ahora ponemos $T_0 = 0,\ T_n = S_1 + \cdots S_n$ y

$$X_t = Z_n \quad \text{si } T_n \leq t < T_{n+1}.$$

# Las ecuaciones de Kolmogorov

## Ecuación backward de Kolmogorov

Para cualquier $x, y \in E$, las probabilidades de transición satisfacen la ecuacion backward de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t(x,y) = \sum_{z \in E} \alpha(x,z)\, P_t(x,z) - P_t(x,y)\,.$$

Dada la matriz de tasas de transición, definiremos a la matriz infinitesimal $Q$ mediante:

$$Q_{x,y} = \begin{cases} \alpha(x,y) & x \neq y \\ -c(x) & x = y \end{cases}.$$

Entonces la ecuación backward de Kolmogorov se puede escribir como la ecuación diferencial para la matriz $P_t$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = Q P_t.$$

# Las ecuaciones de Kolmogorov

La ecuación backward de Kolmogorov se puede escribir como la ecuación diferencial para la matriz $P_t$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t = Q P_t.$$

Cuando el espacio de estados $E$ es finito, la única solución está dada en términos de la exponencial de la matriz infinitesimal: sea

$$e^{tQ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q^n}{n!}.$$

Entonces $P_t = e^{tQ}$ y también se satisfacen las ecuaciones forward de Kolmogorov:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tQ} = e^{tQ} Q.$$

# Distribuciones invariantes

## Distribución invariante

Decimos que una distribución $\nu$ en $E$ (identificada con la colección numérica $\nu_x = \nu(\{x\})$) es **invariante** para una familia Markoviana si

$$\sum_x \nu_x P_t(x, y) = \nu_y.$$

## Como encontrar distribuciones invariantes

Si $\nu$ es invariante entonces $\nu Q = 0$.
Una medida de probabilidad $\nu$ tal que $\sum_x \nu_x c(x) < \infty$ es invariante para $X$ si y sólo si $c\nu = (c_x \nu_x, x \in E))$ es invariante para la cadena asociada.

## Aperiodicidad de las cadenas a tiempo continuo

$P_t(x, y) > 0$ para alguna $t > 0$ si y sólo si $P_t(x, y) > 0$ para toda $t > 0$.

# El teorema fundamental de convergencia

## Teorema fundamental de convergencia

Si $(\mathbb{P}_x)$ es una familia markoviana irreducible entonces son equivalentes:

1. Existe una única distribución invariante $\nu$ para la familia que satisface $\nu_x > 0$ para toda $x \in E$ y para cualquier distribución inicial $\mu$:
$$\lim_{t\to\infty} \sum_x |\mathbb{P}_\nu(X_t = y) - \nu_y| = 0.$$
2. Para alguna $h > 0$, la sucesión de variables aleatorias $(X_{nh}, n \in \mathbb{N})$ es una cadena de Markov positivo recurrente.

En caso contrario, no existe ninguna distribución invariante y $\mathbb{P}_x(X_t = y) \to 0$ conforme $t \to \infty$.