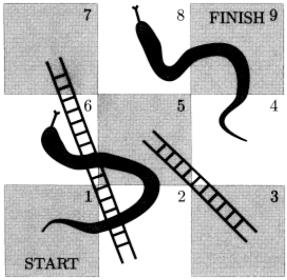
TAREA 3
PROCESOS ESTOCÁSTICOS, SEMESTRE 2012-II

Ejercicio 1 (Ej. 1.3.3 p. 18 de [Nor98]). *Un juego de serpientes y escaleras se juega en el siguiente tablero*



En cada turno un jugador lanza una moneda justa. Si cae águila avanza dos cuadros y si no, sólo uno. Si el jugador cae al pie de una escalera, sube por ella, mientras que si cae donda hay una cabeza de serpiente, se resbala hasta la cola.

(1) *¿Cuántos turnos se requiere en promedio para terminar el juego?*
(2) *¿Cuál es la probabilidad de que al encontrarse en el cuadro 5 un jugador termine el juego sin llegar al cuadro 1?*

Ejercicio 2 (Ej. 1.4.1 de [Nor98]). *Sean $\xi_1, \xi_2, \dots$ variables aleatorias independientes tales que*

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = 1/2 \quad y \quad \mathbb{P}(\xi = -1) = 1/2,$$

$X_0 = 0$ *y*

$$X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}.$$

Defina además

$$H_0 = \min \{n \geq 0 : X_n = 0\}$$

con la convención usual $\min \emptyset = \infty$*. Pruebe que la función generadora* ϕ *de* H_0 *dada por*

$$\phi(s) = \mathbb{E}\left(s^{H_0}\right)$$

satisface

$$s\phi(s)^3 - 2\phi(s) + s = 0.$$

Ejercicio 3. *Sea* $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ *una familia markoviana asociada a la matriz de transición* P. *Defina*

$$f_{i,j}^m = \mathbb{P}_i(X \text{ visita a } j \text{ por primera vez al instante } m).$$

Pruebe la descomposición de primer pasaje

$$P_{i,j}^n = \sum_{m=0}^{n} f_{i,j}^m P_{j,j}^{n-m}.$$

Sugerencia: intente interpretar probabilísticamente la igualdad.

Ejercicio 4. *Una gráfica es una pareja* (V, E) *que consta de un conjunto* V *(que supondremos finito), llamado conjunto de vértices, y un conjunto* E *que consta de subconjuntos de dos elementos de* V, *a los cuales llamamos aristas. Es usual imaginarnos la gráfica como una colección de puntos (etiquetados por los elementos de* V*) unidos por aristas como en el siguiente dibujo. Una*

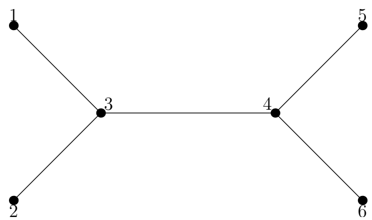


Figura 1. Visualización de la gráfica (V, E) con $V = \{1, \ldots, 6\}$ y $E = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}\}$

gráfica es conexa si para todos $u, v \in V$ *existen* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *tales que*

$$\{v, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v\} \in E$$

Una caminata aleatoria simple en la gráfica es una cadena de Markov en la que a cada instante se mueve de un vértice a otro escogiendo las aristas a su disposición con la misma probabilidad.

1. *Pruebe que una caminata aleatoria sobre una gráfica es irreducible si y sólo si la gráfica es conexa. En este caso, diga si la distribución estacionaria existe y es única.*
2. *Escriba la matriz de transición, clasifique los estados y encuentre su periodo en el ejemplo de la Figura 1.*

(3) *Sea π la medida de probabilidad que asigna a v la cantidad de aristas que emanan de v sobre la cantidad total de aristas. Pruebe que se satisface la condición de balance detallado*

$$\pi_u P_{u,v} = \pi_v P_{v,u}$$

y que por lo tanto π es invariante.

(4) *Dé un ejemplo de gráfica en el que $P^n_{i,j} \not\to \pi_j$ conforme $n \to \infty$ y uno en el que sí.*

Ejercicio 5. *En los exámenes generales de probabilidad que se han aplicado del 2006 al 2012, busque los problemas relativos a cadenas de Markov. Escoja uno diferente al de sus compañeros y resuélvalo.*

References

[Nor98] J. R. Norris, *Markov chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Reprint of 1997 original. MR 1600720 (99c:60144)