TAREA 4
PROCESOS ESTOCÁSTICOS, SEMESTRE 2012-II

Ejercicio 1 (Tomado del examen general de probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Febrero 2011)**.** *Una planta de producción toma su energía de dos generadores. La cantidad de generadores al tiempo t está representado por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0, 1, 2\}$ y matriz infinitésimal Q dada por*

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X, clasifique los estados, diga si existe una única distribución invariante y en caso afirmativo, encuéntrela. Calcule explícitamente las potencias de la matriz de transición. (Recuerde que de ser posible diagonalizar, esta es una buena estrategia.)

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos generadores estén trabajando al tiempo t si sólo uno trabaja al tiempo cero?

(3) Si ρ_2 denota la primera vez que ambos generadores están trabajando al mismo tiempo, encuentre la distribución de ρ_2 cuando sólo un generador está trabajando al tiempo cero.

(4) Encuentre la proporción de tiempo asintótica en que los dos generadores están trabajando. Si cada generador produce 2.5 MW de energía por unidad de tiempo, ¿Cuál es la cantidad promedio de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo?

Ejercicio 2 (Procesos de ramificación a tiempo continuo)**.** *Sea μ una distribución en $\mathbb{N}$. A μ_k lo interpretamos como la probabilidad de que un individuo tenga k hijos. Nos imaginamos la dinámica de la población como sigue: a tasa λ, los individuos de una población se reproducen. Entonces tienen k hijos con probabilidad μ_k. Se pueden introducir dos modelos: uno en que el individuo que se reproduce es retirado de la población (nos imaginamos que muere) y otro en que no es retirado de la población (por ejemplo cuando se* *interpreta a la población como especies y a sus descendientes como mutaciones). En el caso particular del segundo modelo en que* $\mu_1 = 1$*, se conoce como proceso de Yule.*

(1) *Especifique un modelo de cadenas de Markov a tiempo continuo para cada uno de los modelos anteriores. A estos procesos se les conoce como procesos de ramificación a tiempo continuo.*

Nuestro primer objetivo será encontrar una relación entre procesos de ramificación a tiempo continuo y procesos de Poisson compuestos. Sea N *un proceso de Poisson y* S *una caminata aleatoria independiente de* N *tal que* $\mathbb{P}(S_1 = j) = \mu_{j-1}$ *ó* μ_j *dependiendo de si estamos en el primer caso o en el segundo. Sea* $k \geq 0$ *y definamos a* $X_t = k + S_{N_t}$*.*

(2) *Diga brevemente por qué* X *es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal para ambos modelos.*

Sea ahora $\tau = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ *y* $Y_t = X_{t\wedge\tau}$*.*

(3) *Argumente por qué* Y *es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal.*
(4) *Argumente por qué existe un único proceso* Z *que satisface*

$$Z_t = Y_{\int_0^t Z_s\, ds}$$

y que dicho proceso es un proceso de ramificación a tiempo continuo. Sugerencia: Recuerde que las trayectorias de Y *son constantes por pedazos.*

Ahora nos enfocaremos en el proceso de Yule.

(5) *Escriba las ecuaciones backward de Kolmogorov para las probabilidades de transición* $P_t(x,y)$*. Al argumentar por qué* $P_t(x,x) = e^{-\lambda x}$*, resuelva las ecuaciones backward por medio de la técnica de factor integrante (comenzando con* $P_t(x,x+1)$*) y pruebe que*

$$P_t(x,y) = \binom{y-1}{y-x} e^{-\lambda x t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{y-x}.$$

(6) *Al utilizar la fórmula para la esperanza de una variable binomial negativa, pruebe que*

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = x e^{\lambda t}.$$

(7) *Pruebe que* $e^{-\lambda t} Z_t$ *es una martingala no-negativa y que por lo tanto converge casi seguramente a una variable aleatoria* W*.*
(8) *Al calcular la transformada de Laplace de* $e^{-\lambda t} Z_t$*, pruebe que* W *tiene distribución exponencial. Por lo tanto, argumente que casi seguramente* Z *crece exponencialmente.*

Ejercicio 3. *Sea N un proceso Poisson de parámetro λ y sea T_n el tiempo de su enésimo salto.*

(1) Pruebe que condicionalmente a T_2, T_1 es uniforme en $[0, T_2]$.
(2) Pruebe que si W_1 y W_2 son exponenciales de parámetro λ independientes entre si y de una variable uniforme U, entonces $U(W_1 + W_2)$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.
(3) Conjeture cómo se generaliza lo anterior con T_n y T_1.
(4) Escriba dos programas en Octave que simulen al proceso de Poisson de parámetro λ en el intervalo $[0, 1]$. En uno utilizará sólo variables exponenciales y en el otro puede utilizar una variable Poisson.

Ejercicio 4. *Sea Ξ una medida de Poisson aleatoria en $(0, \infty) \times (0, \infty)$ cuya medida de intensidad ν está dada por $\nu(ds, dx) = \mathbf{1}_{x>0} C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$.*

(1) Determine los valores de α para los cuales ν es σ-finita.

Nos restringimos ahora a valores de α para los cuales ν sea σ-finita. Sean $f_t(s, x) = \mathbf{1}_{s \leq t} x$ y $X_t = \Xi f_t$.

(2) Determine los valores de α para los cuales $X_t < \infty$ para toda $t \geq 0$ casi seguramente.

Nos restringiremos a dichos valores de α.

(3) Calcule $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_t}\right)$ y pruebe que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha} X_1$.
(4) Diga por qué el siguiente código en Octave simula la trayectoria aproximada del proceso X en el intervalo $[0, 1]$.

```
C=1;
e=.000001;
alpha=1/2;
lambda=C/e^alpha;
T=1;
N=poissrnd(lambda*T, 1);
u=T*rand(N,1);
dx=e./rand(N,1).^(1/(alpha));
s=[0;cumsum(dx)];
t=[0;sort(u)];
subplot(1,2,1)
plot(t(2:length(t)),dx)
subplot(1,2,2)
plot(t,s)
```