Ejercicio 1 (Vectores gaussianos). Sea $\vec{N} = (N_1, \dots, N_d)'$ una muestra de tamaño d de la distribución normal estándar.

- (1) Calcule los momentos de orden impar de $|N_1|$.
- (2) Calcule la distribución de $\|\vec{N}\|^2$ mediante el siguiente procedimiento:
 - (a) Calcule la densidad de N_1^2 e identifique la distribución.
 - (b) Calcule la transformada de Laplace de N_1^2 (es la función $u \mapsto \mathbb{E}(\exp(-uN_1^2))$) y elévela a la potencia d para obtener la transformada de Laplace de $\|\vec{N}\|^2$.
 - (c) Para qué valores de u es finita la transformada de Laplace de N_1^2 ?
 - (d) Puesto que la transformada de Laplace determina la distribución de una variable aleatoria, identifique la distribución de $\|\vec{N}\|^2$.
 - (e) Para qué valores de u es finita la transformada de Laplace de $\|\vec{N}\|^2$?
- (3) Diga por qué la variable $C = N_2/N_1$ está bien definida y calcule su densidad al calcular la marginal de la variable $(N_1, N_2/N_1)$. Identifique la distribución de C . Bono especial: calcule, mediante cálculo de residuos, a la función característica de C al utilizar la densidad que encontró.
- (4) Calcule la distribución de $A = N_1^2 / (N_1^2 + N_2^2)$ mediante el siguiente procedimiento: escriba $A = 1 / (1 + C^2)$, donde $C = N_1/N_2$ y utilice la densidad de la variable simétrica C que hemos calculado anteriormente. ¿Reconoce la densidad que obtuvo?
- (5) Sea N una variable aleatoria con distribución normal estándar. Sea $N_a = N\mathbf{1}_{|N| \leq a} - N\mathbf{1}_{|N| > a}$. Utilice el teorema de convergencia dominada enunciado en clase para probar que

$$\phi : a \mapsto \mathbb{E}(N \cdot N_a)$$

es continua en $[0, \infty)$. Pruebe además que $\lim_{a \rightarrow 0} \phi(a) = -1$ y que $\lim_{a \rightarrow \infty} \phi(a) = 1$. Concluya que existe $a_* \geq 0$ tal que $\phi(a) = 0$ y concluya que aunque N y N_{a_*} son no correlacionadas, no son independientes. ¿Contradice esto al hecho de que para vectores gaussianos la independencia es equivalente a la ausencia de correlación?

- (6) Sea $N = (N_1, N_2)$ un vector gaussiano centrado.
 - (a) Pruebe que $N_1 - \mathbb{E}(N_1 N_2) N_2$ es independiente de N_2
 - (b) Calcule una distribución condicional regular para N_1 dada N_2
 - (c) Si B es un movimiento browniano calcule una distribución condicional regular para $B_{t/2}$ dada B_t y relacione esto con la prueba de existencia del movimiento browniano de Paul Lévy.

Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es construir, a partir de movimientos brownianos en $[0, 1]$, al movimiento browniano en $[0, \infty)$.

- (1) Pruebe que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el que existe una sucesión $B^1, B^2, \dots$ de movimientos brownianos en $[0, 1]$ independientes. (Sugerencia: utilice la construcción del movimiento browniano de Lévy (vista en clase) para que la solución sea corta.)
- (2) Defina a $B_t = B_1^1 + \dots + B_1^{[t]} + B_{t-[t]}^{[t]}$ para $t \geq 0$. Pruebe que B es un movimiento browniano.

Ejercicio 3. Sea

$$M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}.$$

- (1) Explique y pruebe formalmente por qué, para toda $n \geq 1$, $\partial^n M_t^\lambda / \partial \lambda^n$ es una martingala.
- (2) Sea $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$. A H_n se le conoce como enésimo polinomio de Hermite. Calcúlelo para $n \leq 5$. Pruebe que H_n es un polinomio para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\partial^n M_t^\lambda / \partial \lambda^n = t^{n/2} H_n(B_t/\sqrt{t}) M_t^\lambda$.
- (3) Pruebe que $t^{n/2} H_n(B_t/\sqrt{t})$ es una martingala para toda n y calcúlela para $n \leq 5$.
- (4) Aplique muestreo opcional a las martingalas anteriores al tiempo aleatorio $T_{a,b} = \min \{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$ (para $a, b > 0$) con $n = 1, 2$ para calcular $\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = b)$ y $\mathbb{E}(T_{a,b})$, Qué concluye cuando $n = 3, 4$? ¿ Cree que $T_{a,b}$ tenga momentos finitos de cualquier orden? Justifique su respuesta.
- (5) Aplique el teorema de muestreo opcional a la martingala M^λ al tiempo aleatorio $T_a = \inf \{t \geq 0 : B_t \geq a\}$ si $\lambda > 0$. Diga por qué es necesaria la última hipótesis y calcule la transformada de Laplace de T_a .
- (6) Opcional (para subir calificación en esta u otra tarea):
 - (a) Modifique el ejercicio para que aplique al proceso Poisson.
 - (b) Resuélva el ejercicio modificado.

Ejercicio 4. Sea B un movimiento browniano y defina $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, $S_t^* = \sup_{s \leq t} |B_s|$.

- (1) Sea $\alpha > 0$ y recuerde que

$$M_t = e^{\alpha B_t - \alpha^2 t/2}$$

es una martingala con trayectorias continuas. Al aplicarle la desigualdad maximal de Doob, deduzca que

$$\mathbb{P}(S_t \geq at) \leq e^{\alpha at + \alpha^2 t/2}.$$

(2) Minimice sobre α y deduzca que

$$\mathbb{P}(S_t \geq at) \leq e^{-a^2 t/2}.$$

(3) Pruebe que

$$N_t = \cosh(\alpha B_t) e^{-\alpha^2 t/2}$$

es una martingala y deduzca que

$$\mathbb{P}(S_t^* \geq at) \leq 2e^{-a^2 t/2}.$$

(4) Deduzca que S_t y S_t^* tienen momentos de cualquier orden.

(5) Pruebe que B_n/n converge casi seguramente a cero conforme $n \rightarrow \infty$ y $n \in \mathbb{N}$. Utilice Borel-Cantelli y la independencia de los incrementos para probar que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{t \in [0,1]} |B_{t_n}| - B_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Deduzca que casi seguramente $B_t/t \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ y $t \geq 0$.

Ejercicio 5. Haga un programa en Octave para resolver los siguientes incisos:

- (1) Divida el intervalo $[0, 1]$ en 2^{10} partes e implemente el método de Lévy para simular al browniano sobre los diádicos de orden 10.
- (2) Modifique el código anterior para obtener 100,000 trayectorias brownianas. A cada trayectoria, calcúlele el máximo, el tiempo en que se alcanza el máximo, el tiempo en que se alcanza el último cero y el tiempo que la trayectoria es positiva y guarde los resultados en 4 vectores.
- (3) Compare la distribución empírica de la muestra de las 4 variables aleatorias reales del inciso anterior con la distribución exacta vista en clase.