TEMARIO DEL CURSO AVANZADO DE PROBABILIDAD CÁLCULO ESTOCÁSTICO

GERONIMO URIBE

1. Tema

Cálculo estocástico

2. Prerequisitos

(1) Probabilidad I.
(2) Temas selectos de Procesos Estocásticos I:
    (a) Martingalas en general, particularmente
        (i) Teorema de muestreo opcional
        (ii) Martingalas e integrabilidad uniforme
        (iii) Desigualdades de cruces, maximal y L_p de Doob
        (iv) Teorema de regularización de martingalas
    (b) Movimiento Browniano
        (i) Existencia

3. Presentación

El cálculo estocástico ha demostrado ser una herramienta de gran aplicabilidad teórica y práctica. Así, desarrollos modernos de la probabilidad dependen del cálculo estocástico y las finanzas matemáticas modernas no se comprenden sin él.

En este curso se abordará principalmente el cálculo estocástico cuando el integrador es un proceso estocástico (tecnicamente una semimartingala) con trayectorias continuas. Se comenzará con el caso del movimiento browniano que se puede estudiar aparte basándose en el artículo original de Ito en donde fue introducido. La integral estocástica respecto de semimartingalas continuas es una generalización importante pues es ahí donde se puede apreciar lo útil de teoría sin los innumerables detalles técnicos que implica considerar procesos discontinuos. Sobre esto, el padre de la teoría de integración estocástica respecto de procesos discontinuos, Paul André Meyer, lamenta que *se necesita un curso de un semestre nada más para las definiciones.* Es por esto que, si el tiempo lo permite, se presentará una simplificación reciente de la prueba del principal obstáculo hacia un estudio riguroso del cálculo estocástico discontinuo al analizar el artículo *A short Proof of the Doob-Meyer Theorem* de Beiglboeck, Schachermayer y Veliyev.

4. Temario

(1) Introducción
    (a) Movimiento browniano y variación cuadrática
    (b) La integral estocástica respecto al movimiento browniano
        (i) Fórmula de Ito
        (ii) Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de Ito

Fecha: 19 de Abril del 2012.

(2) Martingalas continuas
    (a) Recordatorio de martingalas
        (i) Desigualdades de cruces, maximal y L_p de Doob
        (ii) Teorema de muestreo opcional
        (iii) Extensión a martingalas cad
        (iv) Las hipótesis habituales y el teorema de regularización
    (b) Variación cuadrática de martingalas continuas
(3) Cálculo estocástico con trayectorias continuas
    (a) La integral estocástica respecto a martingalas continuas
    (b) Fórmula de Ito
    (c) Teorema de Knight
    (d) Teorema de caracterización de Lévy
    (e) Aplicaciones
        (i) Movimiento browniano y funciones armónicas
        (ii) Procesos de Bessel
        (iii) Polaridad y recurrencia del movimiento browniano multidimensional
        (iv) Martingalas conformes y análisis complejo
        (v) Fórmula de Feynman-Kac
(4) Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas
    (a) Teorema de existencia fuerte y unicidad trayectorial bajo condiciones de Lipschitz
    (b) Técnica de la remoción de deriva
    (c) Teoremas de existencia y unicidad débil mediante cambios de tiempo
    (d) Existencia y unicidad débil de procesos de Bessel en dimensión no-negativa
(5) Introducción al cálculo estocástico con trayectorias discontinuas
    (a) La descomposición de Doob-Meyer
    (b) Variación cuadrática para martingalas cad
    (c) La integral estocástica
    (d) La fórmula de Ito

5. Bibliografía

(1) Kiyosi Ito, Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), 519–524. MR 0014633
(2) Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous martingales and Brownian motion, third ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR MR1725357
(3) K. L. Chung and R. J. Williams, Introduction to stochastic integration, second ed., Probability and its Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. MR 1102676
(4) Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1121940
(5) L. C. G. Rogers and David Williams, Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, MR 1780932