EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
AGOSTO 2012

Duración: 6 horas
Instrucciones:

(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Cada problema tiene una parte básica y puede tener una parte especializada con menor valor.
(4) Los incisos de cada problema se califican independientemente.
(5) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Considere la función

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x,y<0 \\ \frac{x+y}{2} & 0\le x,y\le 1 \\ \frac{1+y}{2} & x>1 \text{ y } 0\le y\le 1 \\ \frac{x+1}{2} & 0\le x\le 1 \text{ y } y>1 \\ 1 & x,y>1. \end{cases}.$$

(1) 2/3 punto Demuestre que F es una función de distribución conjunta.
(2) 1/3 punto Suponga que X y Y son dos variables aleatorias con función de distribución conjunta F y medida de probabilidad asociada $\mathbb{P}$. Vea que $\mathbb{P}((X,Y)\in(0,1]\times(0,1])=0$. ¿ Por qué es cierto este resultado?

Problema 2.

(1) 3/8 punto Pruebe que si (X_1,X_2) es un vector aleatorio con distribución absolutamente continua entonces X_1 y X_2 tienen marginales absolutamente continuas.
(2) 3/8 punto Pruebe que si X_1 y X_2 son independientes y X_1 es absolutamente continua entonces X_1+X_2 es absolutamente continua.
(3) 1/4 punto Pruebe que si X_1 y X_2 son normales estándar independientes, $X=(X_1,X_2)$ y $Z_i=X_i/\|X\|$, entonces (Z_1,Z_2) tiene distribución singular mientras que Z_1 y Z_2 tienen marginales absolutamente continuas.

Problema 3. Sean $U_1,U_2,\ldots$ variables uniformes en $(0,1)$ e independientes y $(a_n,n\in\mathbb{N})$ una sucesión en $[-1/2,1/2]$. Definamos

$$X_n = 2\mathbf{1}_{U_n\le 1/2}-1 \quad \text{y} \quad Y_n = 2\mathbf{1}_{U_n\le 1/2+a_n}-1.$$

Consideremos a las sumas parciales

$$S_n = X_1+\cdots+X_n \quad \text{y} \quad T_n = Y_1+\cdots+Y_n.$$

(1) 2/3 punto Pruebe que $\mathbb{P}(X_n=Y_n$ a partir de cierto índice$)\in\{0,1\}$ y obtenga un criterio para discernir entre ambos casos.
(2) 1/3 punto Enuncie el teorema límite central para S_n, y enuncie y pruebe un teorema límite central para T_n si $\sum_n |a_n|<\infty$.

Problema 4. 1 punto Sean X, Y variables aleatorias y $\mathscr{G}$ una subσ-álgebra. Suponga que X es independiente de $\mathscr{G}$ y que Y es $\mathscr{G}$-medible. Pruebe que para toda $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ medible y acotada, si definimos $h(y) = \mathbb{E}(f(y, X))$ entonces

$$h(Y) = \mathbb{E}(f(X, Y) \mid \mathscr{G}) .$$

Sugerencia: comience con $f(x, y) = \mathbf{1}_A(x)\, \mathbf{1}_B(y)$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{P}(X_i > 0)$ y $\mathbb{P}(X_i < 0)$ son *estrictamente* positivas. Sean $S_n = X_1 + \ldots, X_n$, $a < 0 < b$ y defina

$$A = \{n \in \mathbb{N} : S_n < a \text{ ó } S_n > b\} \quad \text{y} \quad T = \begin{cases} \infty & A = \emptyset \\ \min A & A \neq \emptyset \end{cases} .$$

(1) 1/2 punto Pruebe que $T < \infty$ casi seguramente. *Sugerencia:* Comience suponiendo que $\mathbb{P}(X_i > b - a)$ y $\mathbb{P}(X_i < a - b)$ son *estrictamente* positivas.

Sean B un movimiento browniano (o un proceso de Poisson compensado),

$$A = \{t \geq 0 : B_t < a \text{ ó } B_t > b\} \quad \text{y} \quad T = \begin{cases} \infty & A = \emptyset \\ \inf A & A \neq \emptyset \end{cases} .$$

(2) 1/4 punto Pruebe que $T < \infty$ casi seguramente

(3) 1/4 punto Pruebe que existe $\lambda > 0$ tal que $\mathbb{E}\big(e^{\lambda T}\big) < \infty$ y que por lo tanto T admite momentos de cualquier orden en los dos casos anteriores. *Sugerencia:* acote a T por una variable geométrica.

Problema 6. Sean $(B_t, t \geq 0)$ un movimiento Browniano y $\mathscr{F}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas y en cada caso justifique su respuesta.

(1) 1/2 punto $\big(B_t^3, t \geq 0\big)$ es una $\mathscr{F}_t$-martingala.

(2) 1/2 punto Para cada $a > 0$, el proceso $(Y_t, t \geq 0)$ dado por $Y_t = aB_{t/a^2}$ es un movimiento Browniano con respecto a la filtración $\{\mathscr{F}_{t/a^2} : t \geq 0\}$.

Problema 7. Sea P una matriz de transición irreducible y sean X y Y dos cadenas de Markov independientes con transición P.

(1) 1/2 punto Pruebe que el proceso $(Z_n, n \geq 0)$ dado por $Z_n = (X_n, Y_n)$ es una cadena de Markov.

Sea Q la matriz de transición de Z.

(2) 1/2 punto Pruebe que si P es positivo recurrente, entonces Q es positivo recurrente.

Problema 8. Sea N un proceso de Poisson de parámetro λ y $\mathscr{F}_t, t \geq 0$ su filtración canónica.

(1) 2/3 punto Si $M_t^q = e^{-qN_t + \lambda t\left(1 - e^{-q}\right)}$, verifique que M^q es una $\mathscr{F}_t$-martingala.

(2) 1/3 punto Explique por qué el proceso $M^{n,q}$ dado por

$$M_t^{n,q} = \frac{\partial^n M_t^q}{\partial q^n}$$

es una $\mathscr{F}_t$-martingala para toda $n \in \mathbb{N}$ y calcule $M_t^{1,0}$ y $M_t^{2,0}$.